

Mecânica Quântica

Uma Abordagem Conceitual

Carlos Eduardo Aguiar

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro

2020

Mecânica Quântica: Uma Abordagem Conceitual

- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
- Princípios da Mecânica Quântica
- Sistemas Quânticos Simples
- Realismo, Contextualidade e Não-localidade

Ensinando e Aprendizagem de Mecânica Quântica

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\hbar}{2m\omega} (a+a^\dagger) \right] p = -i \left[\frac{m\omega\hbar}{2} (a-a^\dagger) \right] \\
 & \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{4} (2aa^\dagger + 2a^\dagger a) \psi \\
 & = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) \psi \\
 & = \frac{\hbar\omega}{2} (\underbrace{aa^\dagger + a^\dagger a}_{\hbar}) \psi \\
 & = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a - aa^\dagger) \psi \\
 & \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} (2a^\dagger a + [a, a^\dagger]) \psi
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$
 $NB \hat{n} \psi = n \psi$
 $E = \hbar\omega(\frac{5}{2})$

Dificuldades na aprendizagem de mecânica quântica

- ▶ Dificuldades conceituais
 - Superposição quântica
 - Probabilidade subjetiva x objetiva
 - Complementaridade
 - Transição quântico-clássico
 - Realismo vs. localidade
 - ...
- ▶ Dificuldades matemáticas
 - Vetores
 - Números complexos
 - Espaços vetoriais complexos
 - Operadores, autovalores, autovetores
 - Dimensão infinita, operadores diferenciais, funções especiais
 - ...

Dificuldades na aprendizagem de mecânica quântica

- ▶ Entre os estudantes as dificuldades matemáticas ganham proeminência pela necessidade de adquirir domínio operacional da teoria, essencial a aplicações.
- ▶ Como veremos, é possível expor a teoria quântica, sem descaracterizá-la, reduzindo as ferramentas matemáticas a vetores e um pouco de números complexos. Com isso, torna-se viável dar mais atenção aos aspectos conceituais.
- ▶ Tal abordagem pode ser de interesse a alunos para os quais o aspecto operacional não é o mais importante (licenciandos em física, por exemplo).

Estrutura do Curso

- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
 - Fótons
 - Interferência de fótons
 - Interferência de partículas
 - Interferência e indistinguibilidade
- Princípios da Mecânica Quântica
 - Vetores de estado e o princípio da superposição
 - A regra de Born
 - Complementaridade e o princípio da incerteza
 - Redução do vetor de estado
 - Evolução unitária
 - Resumo: cinemática e dinâmica quânticas
 - O processo de medida e a transição quântico-clássico

Estrutura do Curso (cont.)

- Sistemas com mais de dois estados
- Sistemas compostos e emaranhamento

- Sistemas Quânticos Simples
 - Interferômetro de Mach-Zehnder
 - Caminhos indistinguíveis no interferômetro
 - Medida sem interação
 - O problema de Deutsch

- Realismo, Contextualidade e Não-localidade
 - Realismo e variáveis ocultas
 - Contextualidade e não-localidade

Leituras recomendadas

Alguns livros com abordagem semelhante à adotada no curso:

Nível introdutório

- ▶ R. P. Feynman, *QED – A estranha teoria da luz e da matéria*, Gradiva, 1988.
- ▶ J. Polkinghorne, *Quantum Theory: A Very Short Introduction*, Oxford UP, 2002.
- ▶ V. Scarani, *Quantum physics: a first encounter*, Oxford UP, 2006.
- ▶ B. Rosenblum, F. Kuttner, *Quantum Enigma: Physics Encounters Consciousness*, Oxford UP, 2006.
- ▶ A. Rae, *Quantum Physics: Illusion or Reality?*, Cambridge UP, 2012.
- ▶ M. Le Bellac, *The Quantum World*, World Scientific, 2013.
- ▶ A. Cassinello, J. L. S. Gomes, *O Mistério Quântico – Uma Expedição às Fronteiras da Física*, Planeta, 2017.

Leituras recomendadas (cont.)

Nível intermediário

- ▶ R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Lições de Física de Feynman*, vol. III, Bookman, 2008. Original em inglês disponível em www.feynmanlectures.info/
- ▶ H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica*, Blucher, 2002.
- ▶ I. M. Greca, V. E. Herscovitz, *Introdução à Mecânica Quântica*, UFRGS, 2002. Disponível em www.if.ufrgs.br/public/tapf/n13_2002_greca_herscovitz.pdf
- ▶ O. Pessoa Jr, *Conceitos de Física Quântica*, Livraria da Física, 2003.
- ▶ D. F. Styer, *The Strange World of Quantum Mechanics*, Cambridge UP, 2000.
- ▶ L. Susskind, A. Friedman, *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum*, Basic Books, 2014

Leituras recomendadas (cont.)

Nível avançado

- ▶ D. McIntyre, C. A. Manogue, J. Tate, *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach*, Addison-Wesley, 2012.
- ▶ M. Le Bellac, *Quantum Physics*, Cambridge UP, 2006.
- ▶ M. Beck, *Quantum Mechanics: Theory and Experiment*, Oxford UP, 2012.
- ▶ J. Pade, *Quantum Mechanics for Pedestrians* (2 vols.), Springer, 2014.
- ▶ G. Greenstein, A. G. Zajonc, *The Quantum Challenge: Modern Research on the Foundations of Quantum Mechanics*, Jones & Bartlett, 2005.
- ▶ F. Laloë, *Do We Really Understand Quantum Mechanics?*, Cambridge UP, 2012.

Recursos para o ensino de mecânica quântica

Simulações em computador

- ▶ QuVis (University of St. Andrews)
<http://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/>
- ▶ PhET (University of Colorado)
<http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics/quantum-phenomena>
- ▶ Interferômetro de Mach-Zehnder (UFRJ)
<http://www.if.ufrj.br/~carlos/trablicen/raphael/imz/>

Material didático

- ▶ The Quantum Exchange (American Association of Physics Teachers)
<https://www.compadre.org/quantum/>

Fenômenos Quânticos

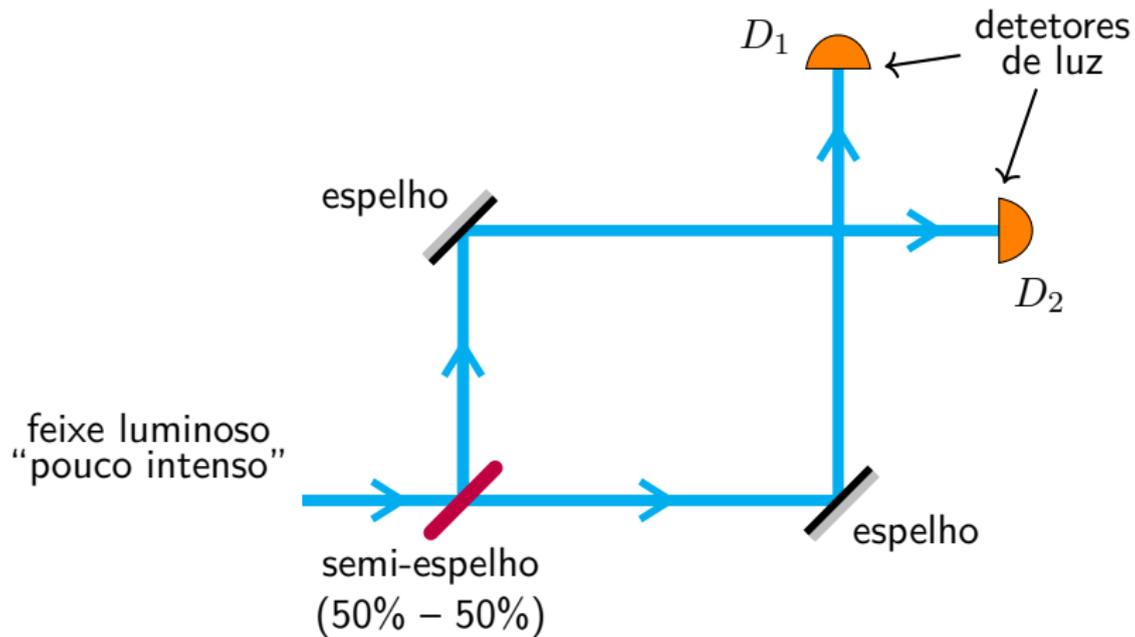


Charles Addams, The New Yorker, 1940

Sumário

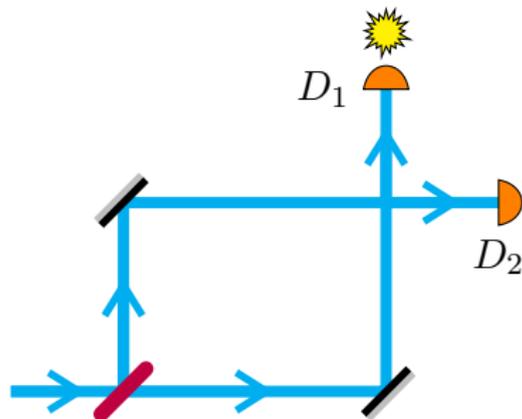
- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
 - Fótons
 - Interferência de fótons
 - Interferência de partículas
 - Interferência e indistinguibilidade
- Princípios da Mecânica Quântica
- Sistemas Quânticos Simples
- Realismo, Contextualidade e Não-localidade

Um experimento com a luz

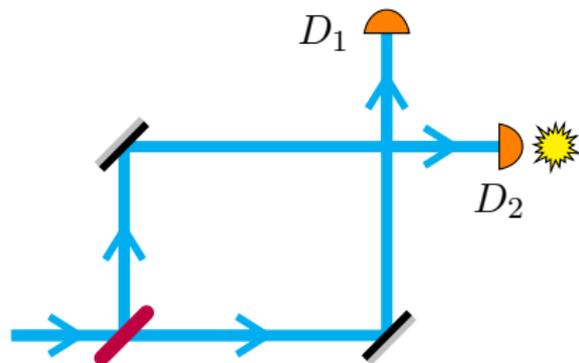


Resultado do experimento

Os detetores nunca disparam ao mesmo tempo:
apenas um (D_1 ou D_2) é ativado a cada vez.

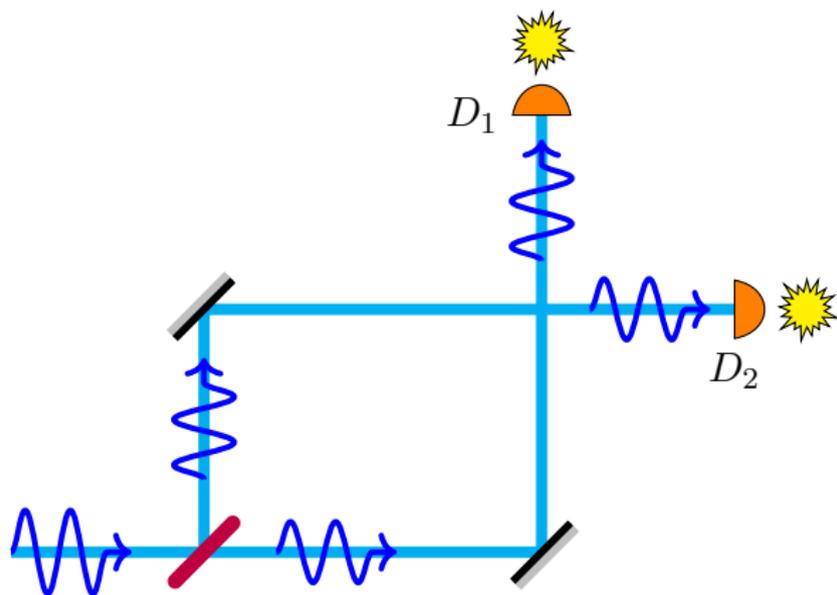


probabilidade = 50%



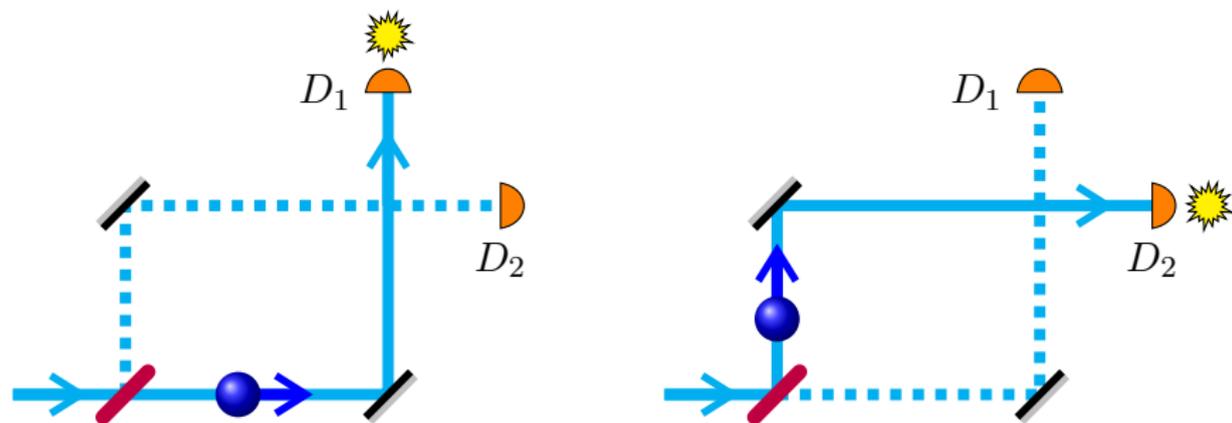
probabilidade = 50%

Se a luz fosse uma onda



... os detetores deveriam disparar simultaneamente.

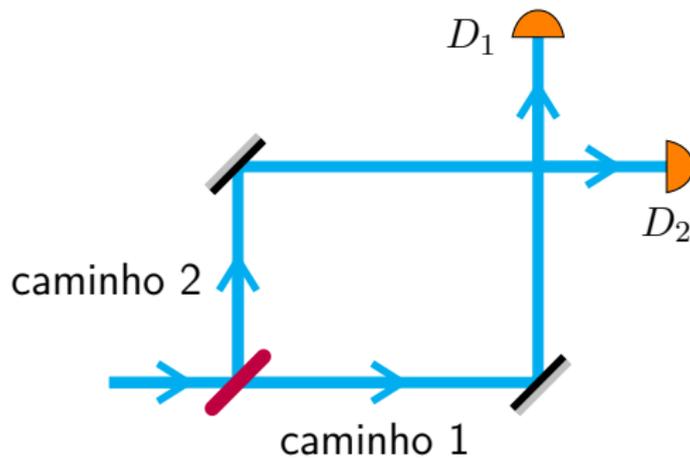
Se a luz for composta por partículas



... ou D_1 dispara, ou D_2 dispara.

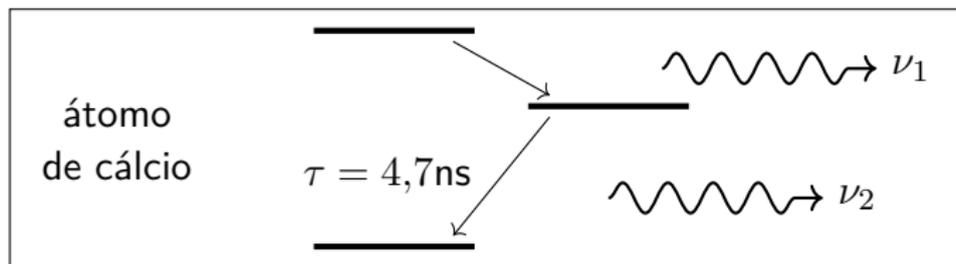
Conclusão

A luz é composta por partículas: os fótons.

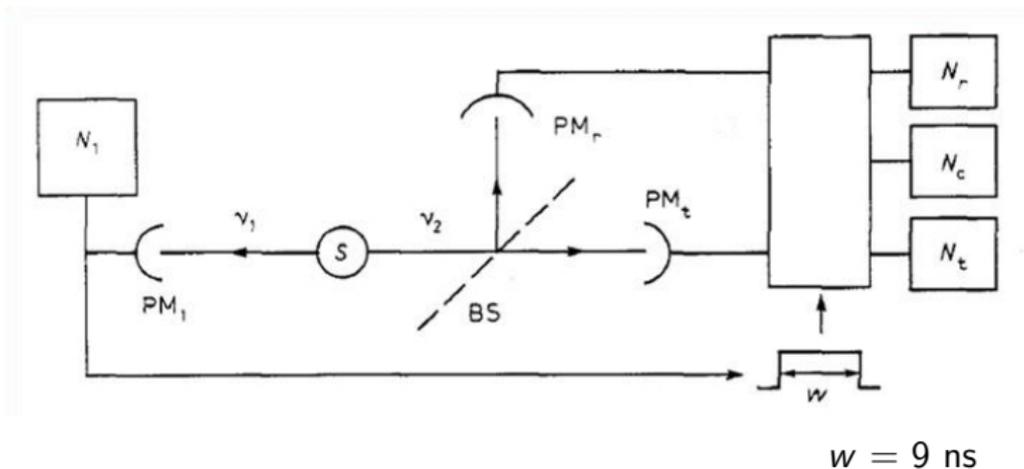


O experimento de anticorrelação de Grangier *et al.*

- ▶ Realizado em 1986 por Philippe Grangier, Gérard Roger e Alain Aspect.
- ▶ A fonte luminosa “pouco intensa” usada no experimento não é fácil de construir.

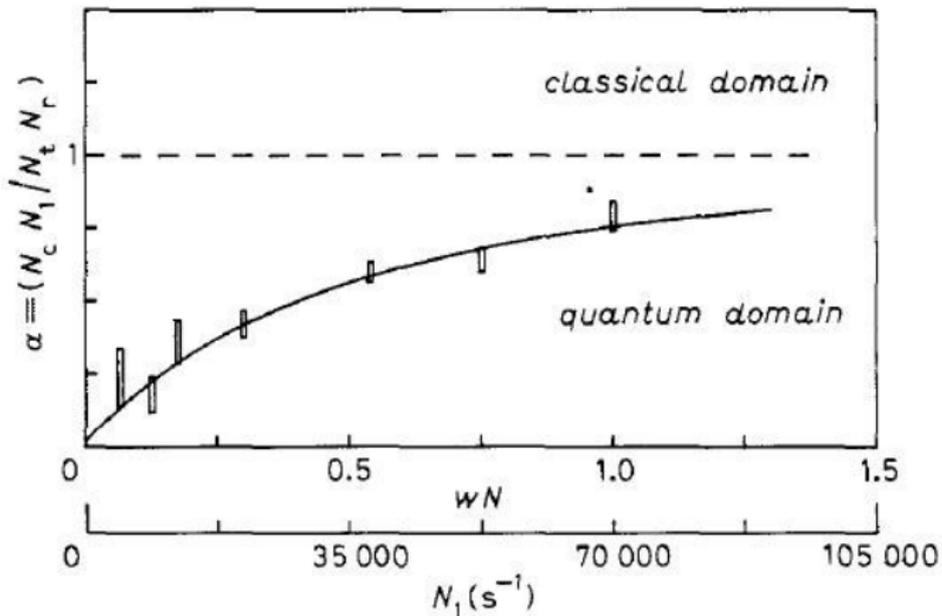


O experimento de anticorrelação de Grangier *et al.*



P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences*, Europhysics Letters 1, 173 (1986).

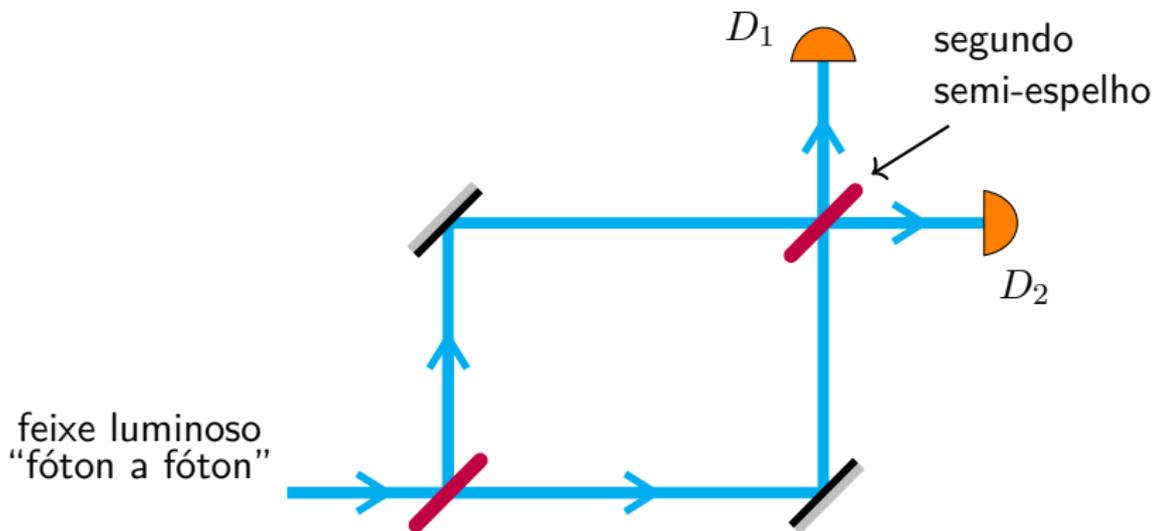
Resultado do experimento de anticorrelação



Sobre o ensino do conceito de fóton

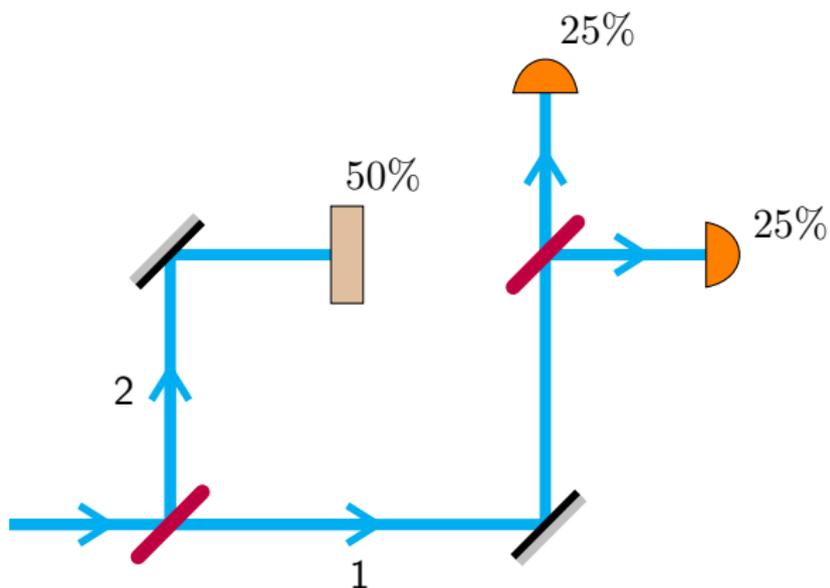
- ▶ Os experimentos de anticoincidência fornecem evidência simples e direta do comportamento corpuscular da luz.
- ▶ Mais fácil de discutir (principalmente no ensino médio) que o efeito fotoelétrico.
- ▶ Ao contrário do que se lê em muitos livros-texto, o fóton não é necessário para explicar os efeitos fotoelétrico e Compton.
 - G. Beck, *Zeitschrift für Physik* 41, 443 (1927)
 - E. Schroedinger, *Annalen der Physik* 82, 257 (1927)

Outro experimento com a luz

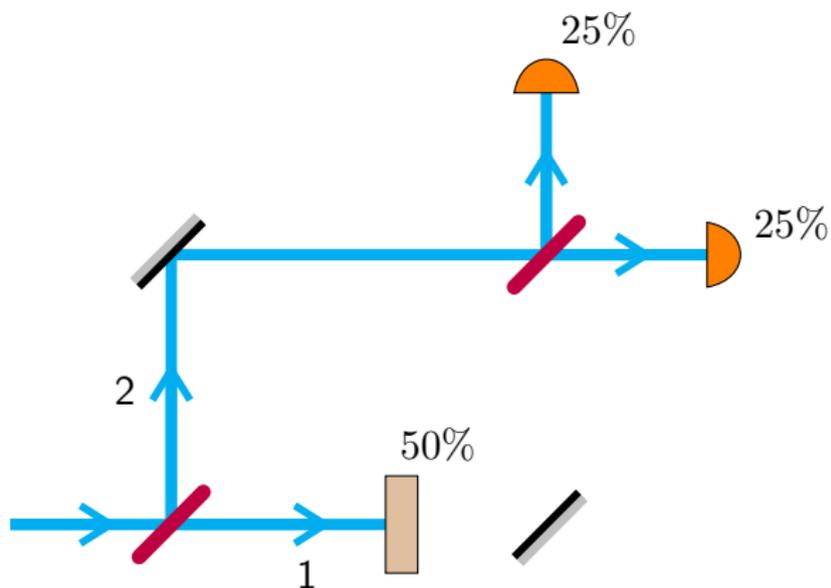


Interferômetro de Mach-Zehnder

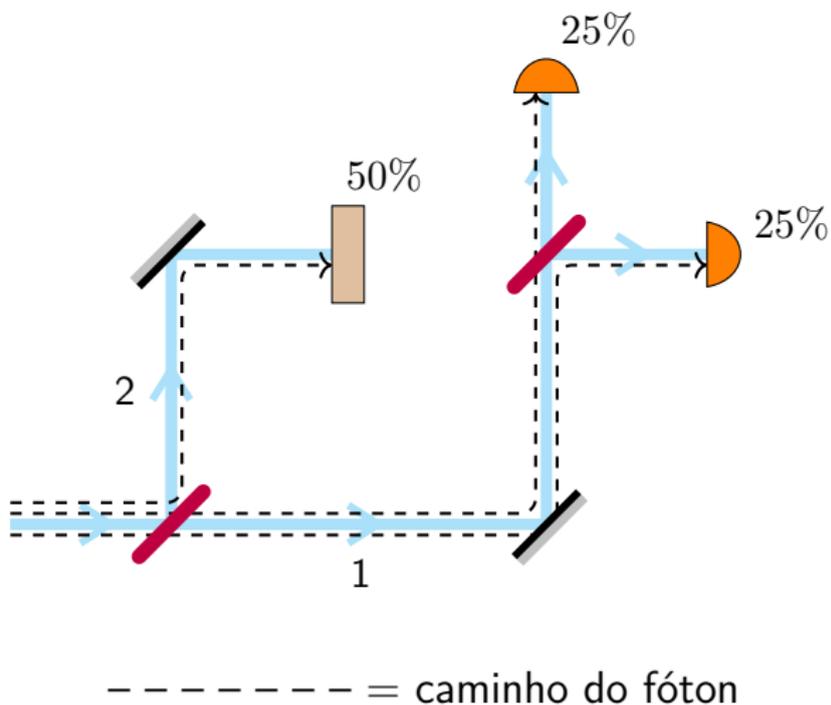
Preliminares: um feixe bloqueado



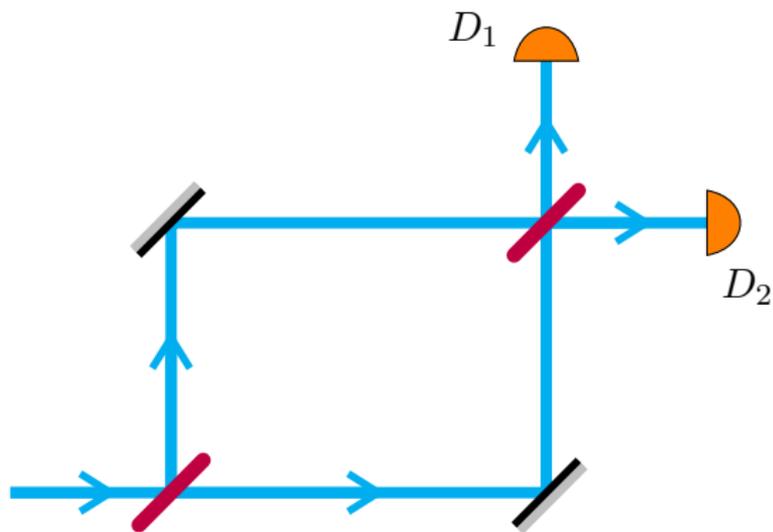
O outro feixe bloqueado



Resultado fácil de entender com partículas

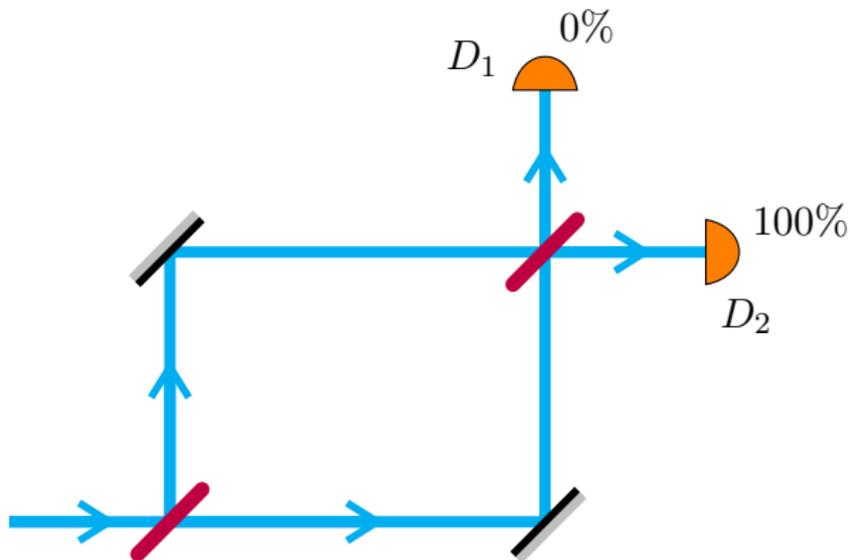


De volta ao experimento com o interferômetro

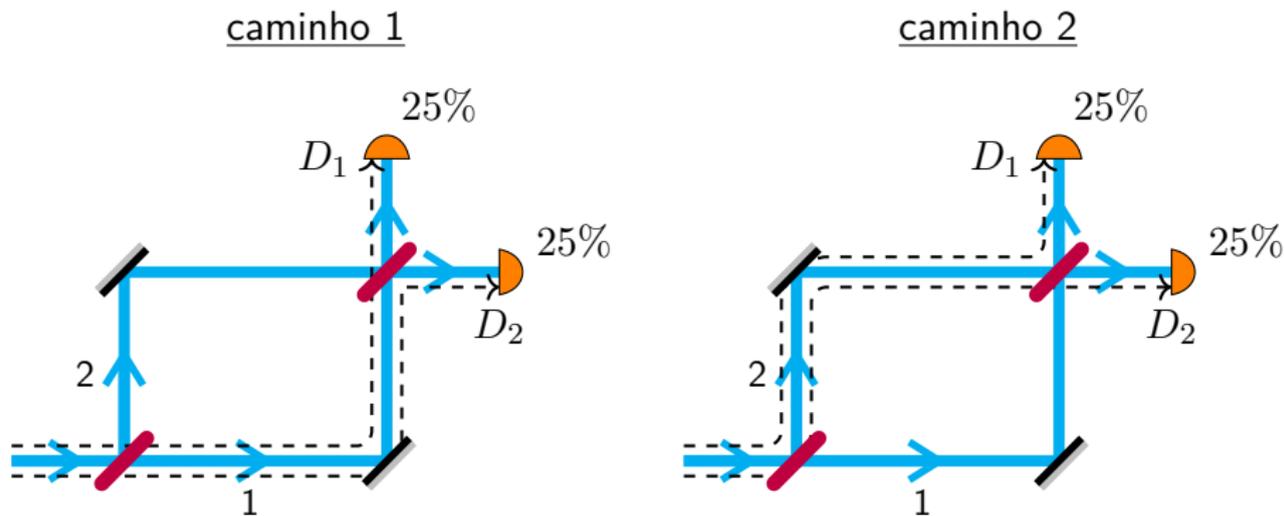


Resultado do experimento

O detetor D_1 nunca dispara. Apenas D_2 registra a chegada dos fótons.



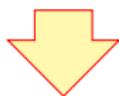
Difícil de entender se os fótons seguem caminhos definidos



Se o fóton segue o caminho 1 (2) não deveria fazer diferença se o caminho 2 (1) está aberto ou fechado. Portanto, deveria valer o resultado do experimento preliminar.

A proposição de Feynman[†]

Cada fóton segue *ou* o caminho 1 *ou* o caminho 2.



$$N_D = N_D^{(1)} + N_D^{(2)}$$

número de fótons
no detetor D

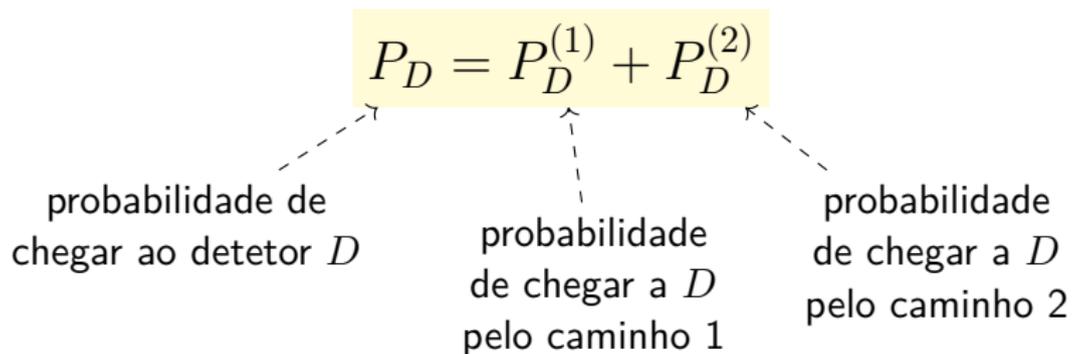
chegam a D
pelo caminho 1

chegam a D
pelo caminho 2

[†] *The Feynman Lectures on Physics* III, p. 1-5

A proposição de Feynman

Em termos das probabilidades:



Teste da proposição

No interferômetro de Mach-Zehnder obtemos experimentalmente:

$$P_{D_1} = 0\% \qquad P_{D_2} = 100\%$$

Nos experimentos preliminares encontramos:

$$P_{D_1}^{(1)} = 25\% \qquad P_{D_2}^{(1)} = 25\%$$

$$P_{D_1}^{(2)} = 25\% \qquad P_{D_2}^{(2)} = 25\%$$

$$P_{D_n} \neq P_{D_n}^{(1)} + P_{D_n}^{(2)} \implies \text{a proposição é falsa!}$$

Repetindo...

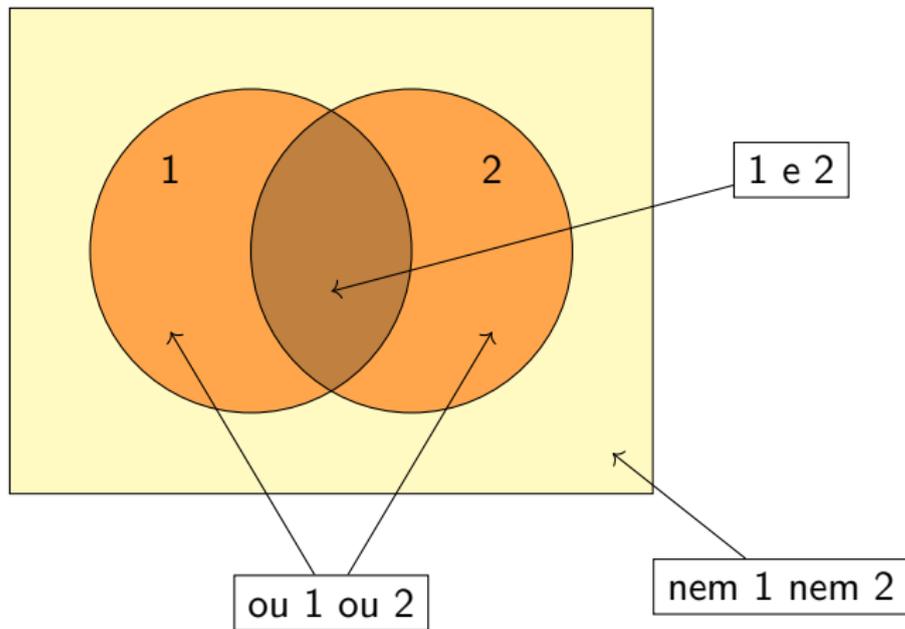
A afirmativa

“o fóton segue ou pelo caminho 1 ou pelo caminho 2”
é falsa.

“... um fenômeno que é impossível, *absolutamente* impossível, de explicar em qualquer forma clássica, e que traz em si o coração da mecânica quântica.”

- R. P. Feynman,
The Feynman Lectures on Physics III, p.1-1

Por onde vai o fóton?



Por onde vai o fóton?

- ▶ Experimentalmente, a opção “ou 1 ou 2” é falsa.
- ▶ Se os dois caminhos forem fechados, nenhum fóton chega aos detetores. Logo, “nem 1 nem 2” também não é aceitável.
- ▶ Parece restar apenas a opção “1 e 2”: o fóton segue os dois caminhos ao mesmo tempo.

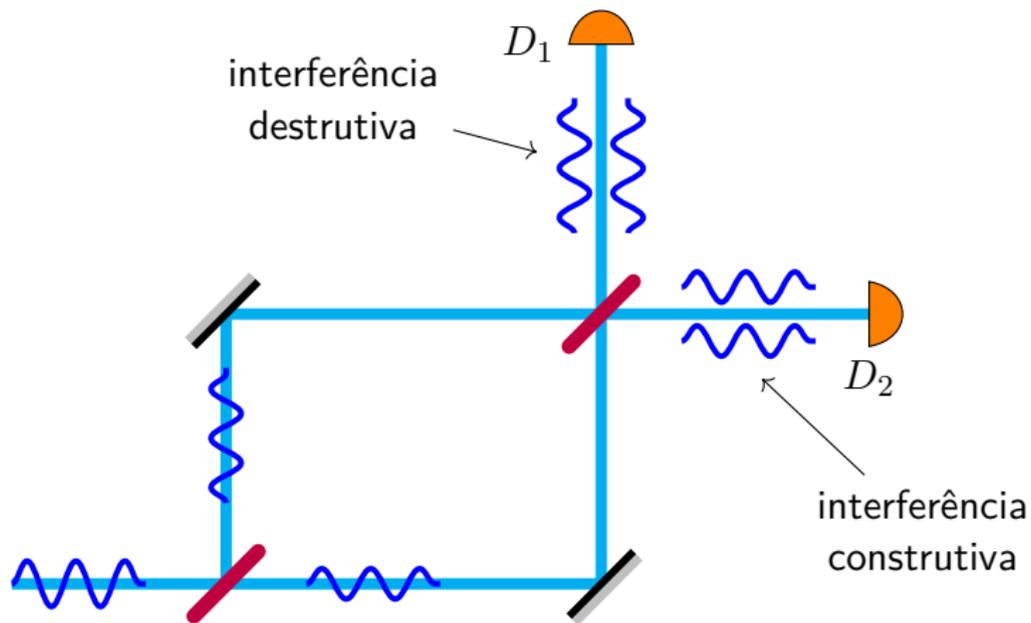
Uma resposta melhor

- ▶ Não faz sentido falar sobre o caminho do fóton no interferômetro, pois a montagem experimental não permite distinguir os caminhos 1 e 2.
- ▶ A pergunta “qual o caminho do fóton?” só faz sentido frente a um aparato capaz de produzir uma resposta.

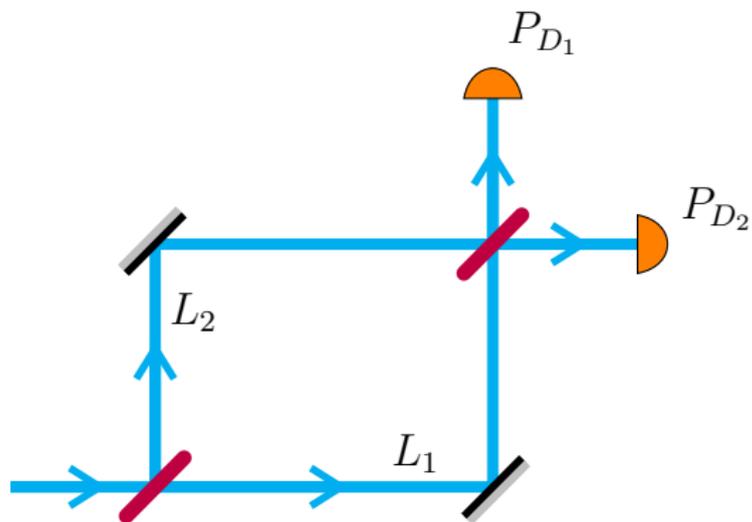
Quando alguém deseja ser claro sobre o que quer dizer com as palavras “posição de um objeto”, por exemplo do elétron (em um sistema de referência), ele deve especificar experimentos determinados com os quais pretende medir tal posição; do contrário essas palavras não terão significado.

- *W. Heisenberg,*
The physical content of quantum kinematics and mechanics
(o artigo de 1927 sobre o princípio da incerteza)

Fácil de entender num modelo ondulatório



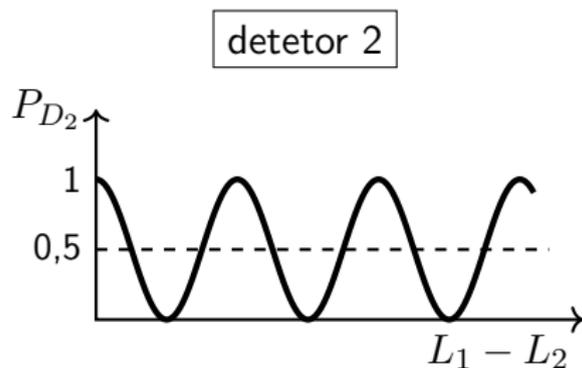
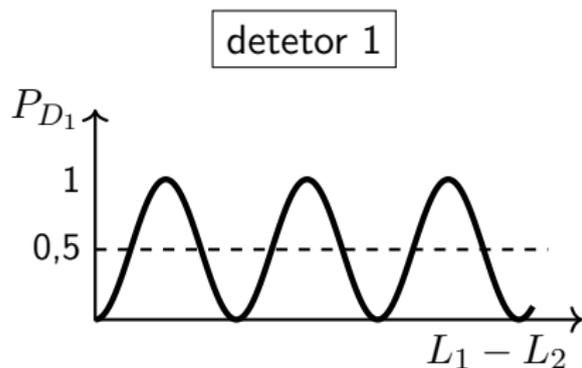
Caminhos de comprimentos variáveis



L_1 e L_2 = comprimentos ajustáveis dos braços do interferômetro

Padrão de interferência

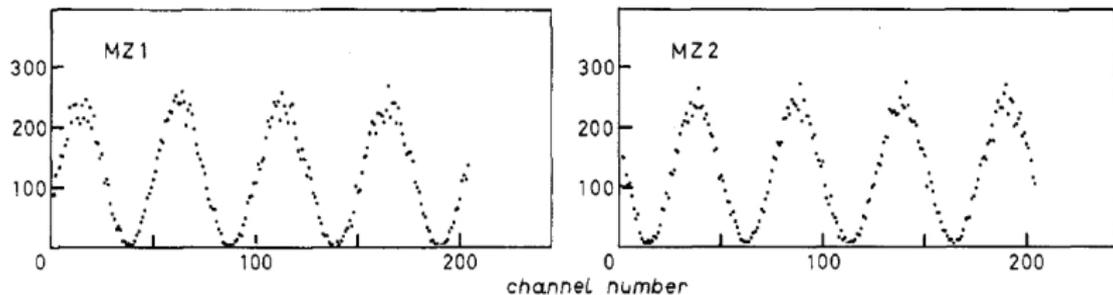
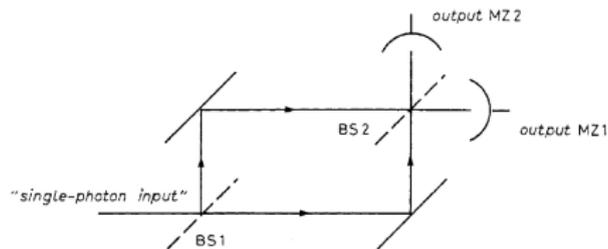
Resultado experimental: as probabilidades P_{D_1} e P_{D_2} dependem de $L_1 - L_2$.



Padrão de interferência

- ▶ As probabilidades não dependem de $L_1 + L_2$, apenas de $L_1 - L_2$.
- ▶ O padrão de interferência permite definir um comprimento de onda.
- ▶ Só há um fóton por vez no interferômetro: o fóton “interfere com ele mesmo”.
- ▶ A linhas tracejadas correspondem a $P_{D_1} = P_{D_2} = 0.5$, ou seja, à hipótese de que o fóton seguiu um único caminho (ou 1 ou 2). A discordância com o resultado experimental mostra novamente que essa hipótese é falsa.
- ▶ Dito de outra maneira: se o fóton seguiu por um único caminho, como ele poderia saber o comprimento do outro caminho (por onde não passou)? Entretanto, é isso que determina a probabilidade dele chegar aos diferentes detetores.

O experimento de Grangier, Roger & Aspect



P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences*, Europhysics Letters **1**, 173 (1986).

A dualidade onda-partícula

Você tinha que saber qual experimento estava analisando para dizer se a luz era onda ou partícula. Esse estado de confusão foi chamado de “dualidade onda-partícula”...

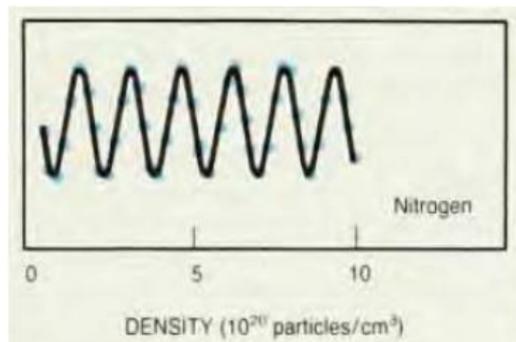
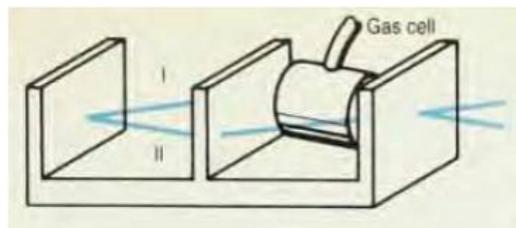
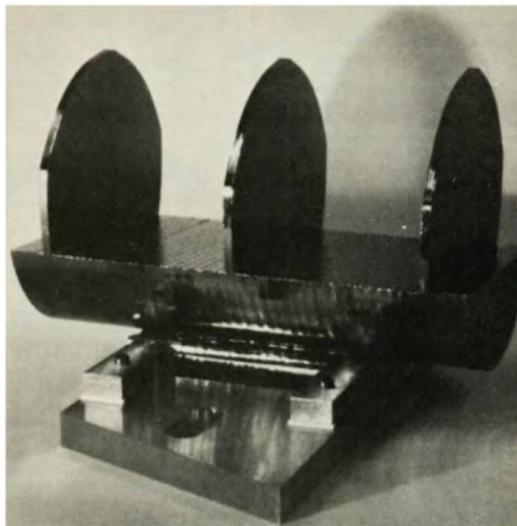
- R. P. Feynman,
QED – The Strange Theory of Light and Matter

A dualidade onda-partícula



De uma vez por todas: eu desejo saber o que estou pagando. Quando a companhia elétrica me disser se a luz é uma onda ou uma partícula, eu farei o cheque!

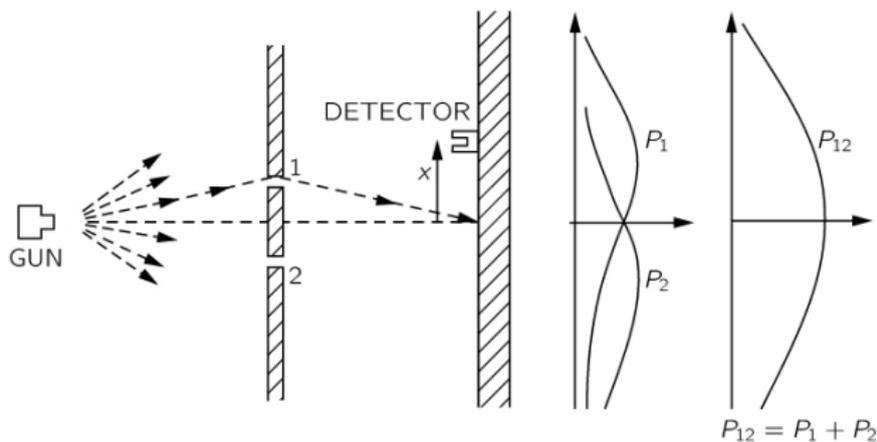
Interferência de nêutrons



Interferômetro de nêutrons

S. A. Werner, *Neutron interferometry*, *Physics Today* 33 (12), 24 (1980)

O experimento de Young com elétrons



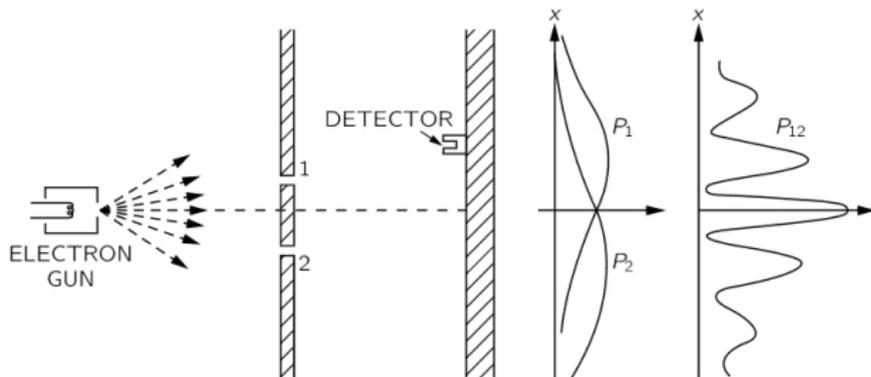
Feynman Lectures on Physics III, fig. 1-1

Partículas “clássicas” passam ou pela fenda 1 ou pela fenda 2

$$\implies P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

O experimento de Young com elétrons

Resultado do experimento:



Feynman Lectures on Physics III, fig. 1-3

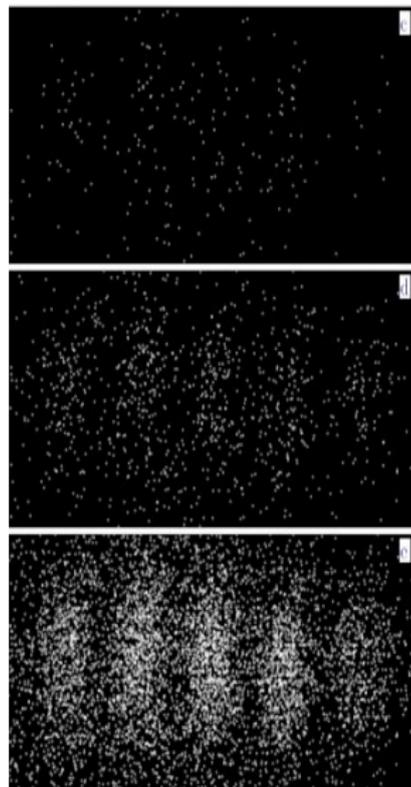
$$P_{12}(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$$

\Rightarrow o elétron não passa “ou pela fenda 1 ou pela fenda 2”

O experimento de Young com elétrons

Formação do padrão de interferência elétron a elétron

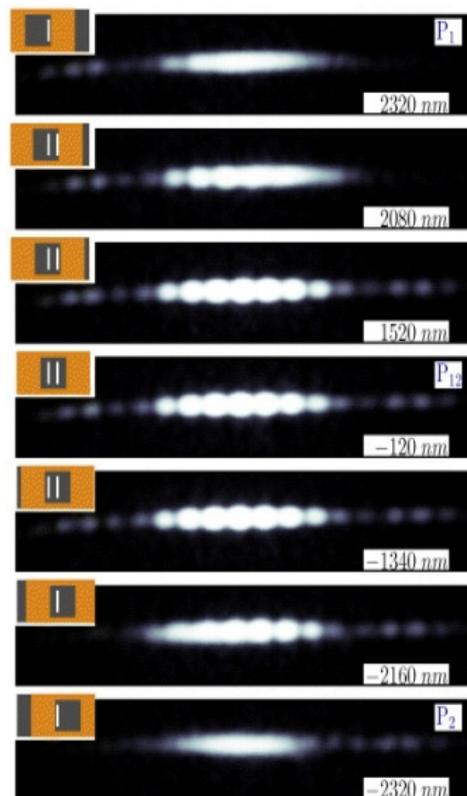
R. Bach *et al.*, *Controlled double-slit electron diffraction*, *New J. Phys.* 15, 033018 (2013)



O experimento de Young com elétrons

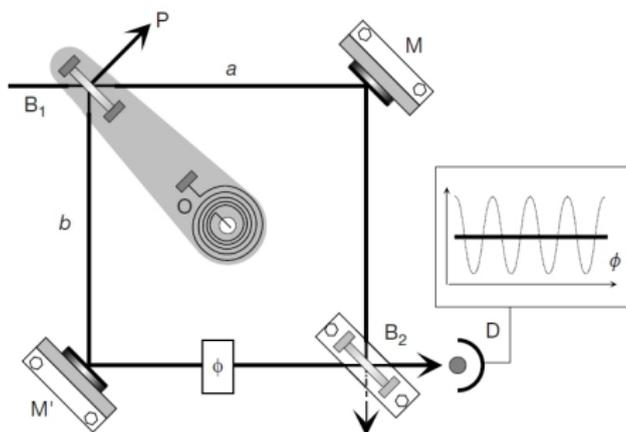
Medida das distribuições
 $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_{1,2}(x)$

R. Bach *et al.*, *Controlled double-slit electron diffraction*, *New J. Phys.* **15**, 033018 (2013)



E se os caminhos forem distinguíveis?

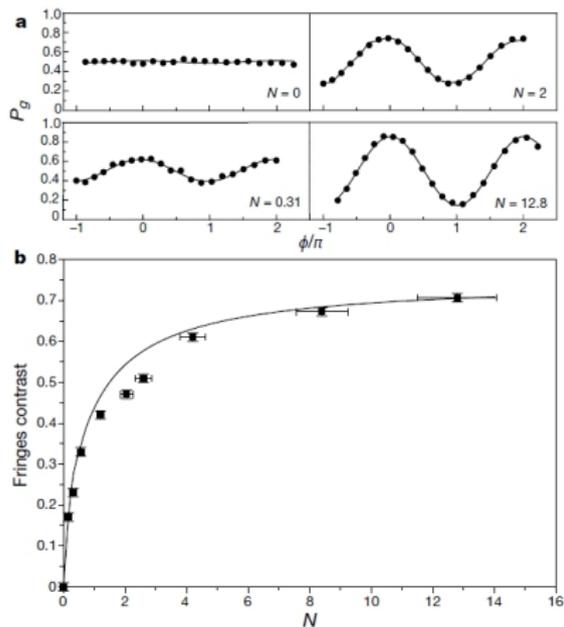
O padrão de interferência desaparece!



$\phi \leftrightarrow$ “diferença de caminhos”

P. Bertet et al., *A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary*, Nature 411, 166 (2001)

E se os caminhos forem distinguíveis?



$N \leftrightarrow$ “massa”

massa $\rightarrow 0$

- ▶ caminho identificável
- ▶ não há interferência

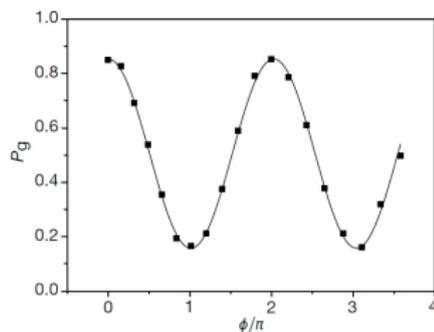
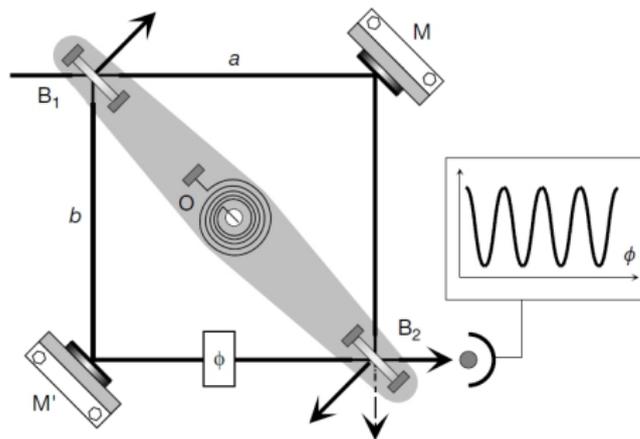
massa $\rightarrow \infty$

- ▶ caminhos indistinguíveis
- ▶ interferência

P. Bertet *et al.*, *A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary*, Nature [411](#), 166 (2001)

E se a informação sobre o caminho for apagada?

A interferência retorna!



impossibilidade de determinar o caminho \implies interferência

P. Bertet et al., *A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary*, Nature **411**, 166 (2001)

Quando há interferência?

Resultado pode ser obtido de duas maneiras alternativas,
indistinguíveis experimentalmente



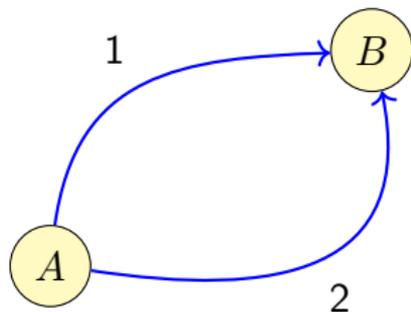
interferência (“1 e 2”)

Resultado pode ser obtido de duas maneiras alternativas,
distinguíveis experimentalmente (“ou 1 ou 2”)



não há interferência

Distinguibilidade \times indistinguibilidade



- ▶ 1 e 2 distinguíveis: $P(A \rightarrow B) = P_1(A \rightarrow B) + P_2(A \rightarrow B)$
- ▶ 1 e 2 indistinguíveis: $P(A \rightarrow B) \neq P_1(A \rightarrow B) + P_2(A \rightarrow B)$

Princípios da Mecânica Quântica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\text{cat sitting}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{cat lying}\rangle$$

Sumário

- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
- Princípios da Mecânica Quântica
 - Vetores de estado e o princípio da superposição
 - A regra de Born
 - Complementaridade e o princípio da incerteza
 - Redução do vetor de estado
 - Evolução unitária
 - Resumo: cinemática e dinâmica quânticas
 - O processo de medida e a transição quântico-clássico
 - Sistemas com mais de dois estados
 - Sistemas compostos e emaranhamento
- Sistemas Quânticos Simples
- Realismo, Contextualidade e Não-localidade

Vetores de Estado e o Princípio da Superposição

Sistemas de dois estados

▶ esquerda / direita



▶ horizontal / vertical



▶ para cima / para baixo



▶ sim / não

▶ 0 / 1

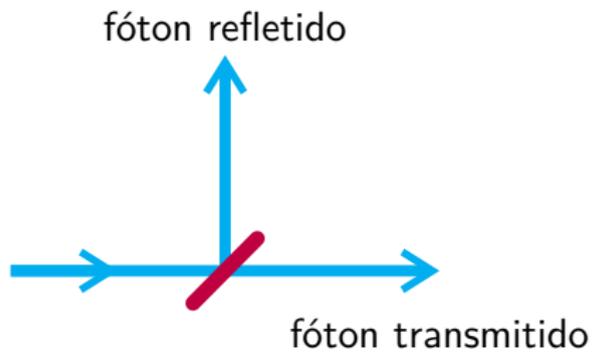
Sistemas de dois estados



cara

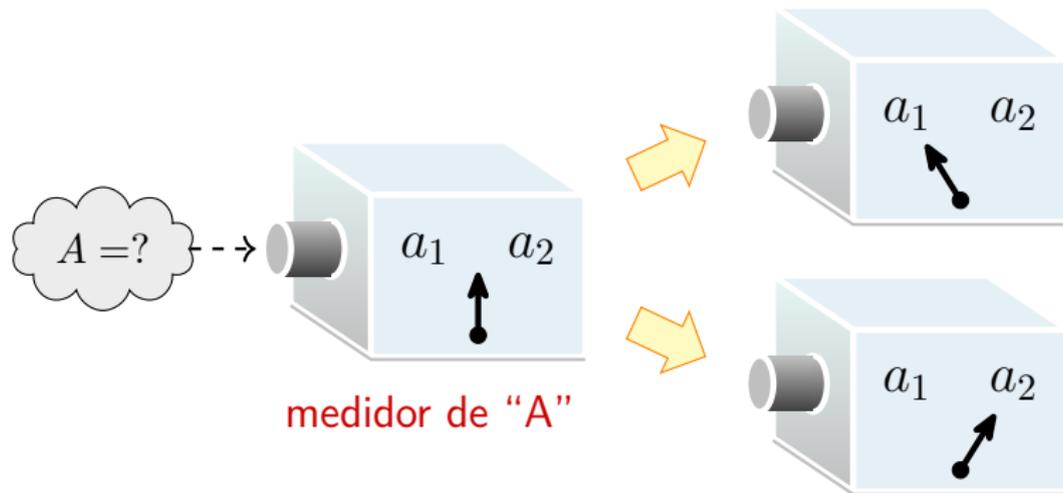


coroa



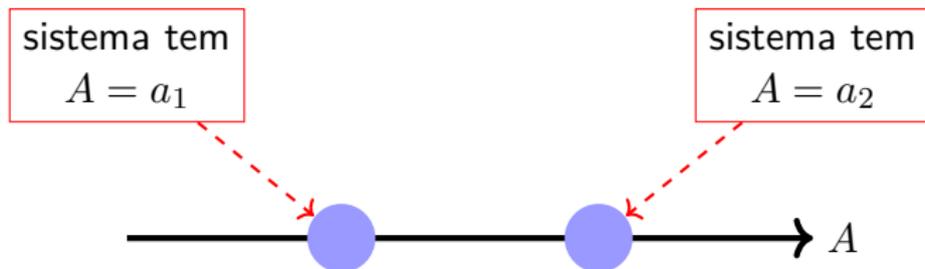
Sistemas de dois estados

Grandeza física observável: $A = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \end{cases}$



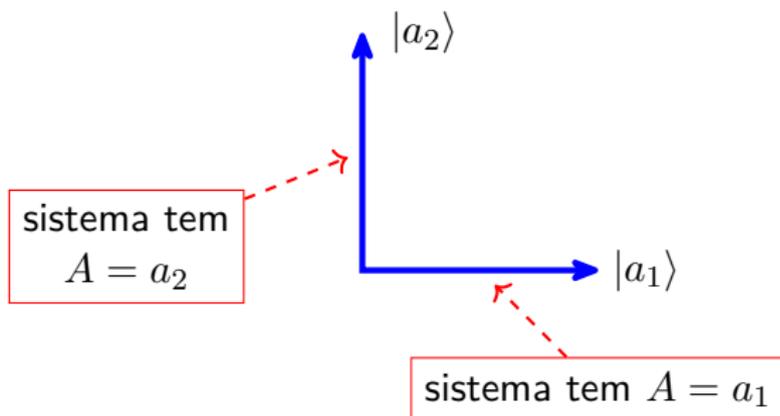
Sistemas clássicos

- ▶ Sistema clássico de dois estados, $A = a_1$ e $A = a_2$.
- ▶ Representação dos estados: pontos no “eixo dos valores de A ”.



Sistemas quânticos: vetores de estado

- ▶ Sistema quântico de dois estados, $A = a_1$ e $A = a_2$.
- ▶ Representação dos estados: vetores ortogonais (de comprimento unitário) em um espaço de duas dimensões.



A notação de Dirac

vetor $\leftrightarrow |\dots\rangle$

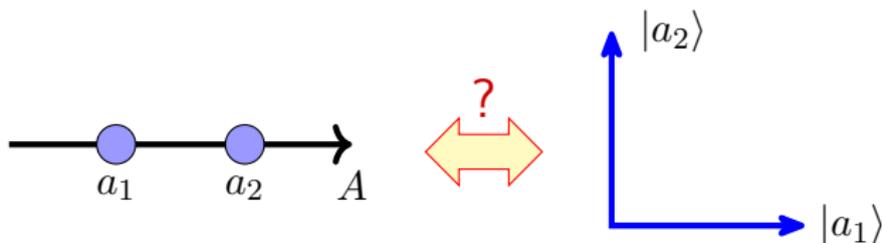


identificação

exemplos: $\left\{ \begin{array}{ll} |a_1\rangle & |a_2\rangle \\ |0\rangle & |1\rangle \\ |\uparrow\rangle & |\downarrow\rangle \\ |\leftrightarrow\rangle & |\updownarrow\rangle \\ |\text{aqui}\rangle & |\text{ali}\rangle \end{array} \right.$

O que muda?

Passar de dois pontos em uma reta para dois vetores perpendiculares não parece ser mais que uma mudança no sistema de “etiquetagem” dos estados.

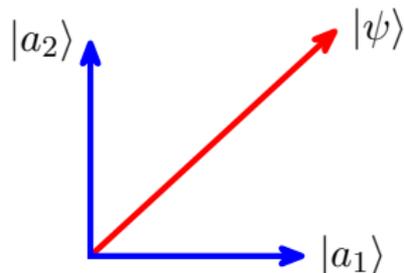


O que muda é o seguinte:

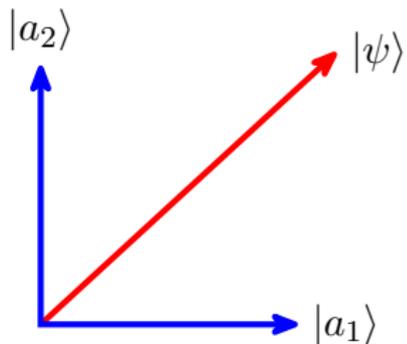
O princípio da superposição

Qualquer combinação linear dos vetores $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ representa um estado físico do sistema.

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$



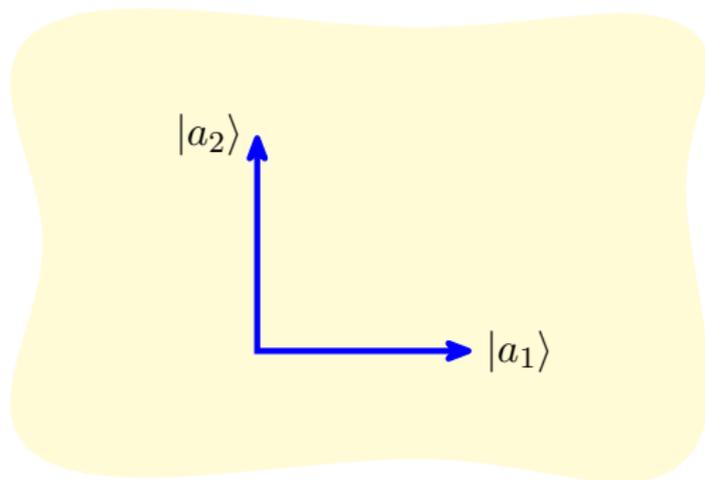
Significado de $|\psi\rangle$?



- ▶ $A = a_1$ e $A = a_2$?
- ▶ fóton pelo caminho 1 e pelo caminho 2?

O espaço de estados é grande

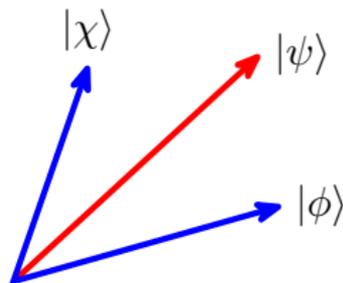
- ▶ Um sistema quântico de dois estados tem muito mais que dois estados, tem infinitos estados.
- ▶ Os estados $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ formam uma *base* do espaço de estados.



Princípio da superposição: formulação geral

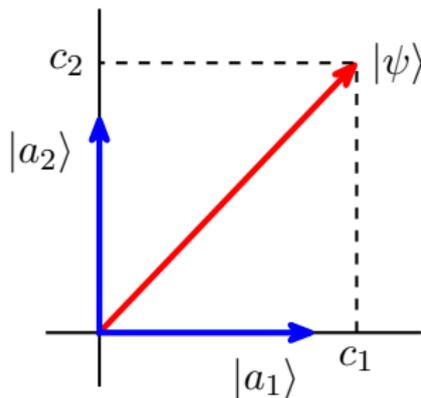
Se $|\phi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são vetores de estado, qualquer combinação linear deles representa um estado físico do sistema.

$$|\psi\rangle = \alpha |\phi\rangle + \beta |\chi\rangle$$



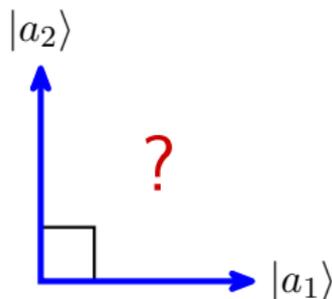
Uma complicação

- ▶ Os números que multiplicam os vetores (os “escalares”) podem ser números complexos: o espaço de estados é um *espaço vetorial complexo*.
- ▶ Deve-se ter cuidado com figuras como esta:



Mais complicações

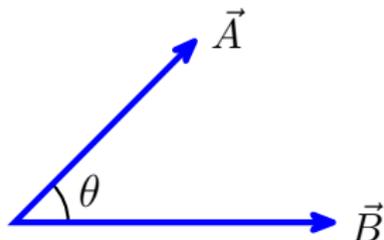
- ▶ Qual o significado de “ortogonalidade” num espaço vetorial complexo?
- ▶ Como se define “comprimento” de um vetor nesse espaço?



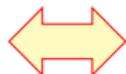
As respostas são encontradas definindo-se o *produto escalar* de vetores nesse espaço.

O produto escalar usual

Produto escalar de dois vetores “geométricos” \vec{A} e \vec{B} :



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos \theta$$



1. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
2. $\vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \cdot \vec{B})$
3. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
4. $\vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0$
5. $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \iff \vec{A} = 0$ (“0” é o vetor nulo)

O produto escalar em um espaço vetorial complexo

O produto escalar (ou produto interno) de dois vetores $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ é um número complexo $\langle\phi|\psi\rangle$ com as seguintes propriedades:

1. $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \implies \langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi_1\rangle + \langle\phi|\psi_2\rangle$
2. $|\psi\rangle = c|\chi\rangle \implies \langle\phi|\psi\rangle = c\langle\phi|\chi\rangle$
3. $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$ (o asterisco $*$ indica o conjugado complexo)
4. $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ (devido a (3), $\langle\psi|\psi\rangle$ deve ser real)
5. $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle = 0$ (“0” é o vetor nulo)

O produto escalar em um espaço vetorial complexo

Forçando um pouco a notação de Dirac podemos escrever as propriedades (1) e (2) como:

1. $\langle \phi | \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \phi | \psi_1 \rangle + \langle \phi | \psi_2 \rangle$
2. $\langle \phi | c\psi \rangle = c \langle \phi | \psi \rangle$

Podemos também reuni-las numa só expressão:

▶ $\langle \phi | c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = c_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$

O produto escalar em um espaço vetorial complexo

- ▶ É importante notar que num espaço vetorial complexo o *produto escalar não é comutativo*. Pela propriedade (3), a ordem dos fatores altera o produto.
- ▶ Uma consequência disso é que o produto escalar é *antilinear* no primeiro argumento:

$$\langle c\phi|\psi\rangle = c^* \langle\phi|\psi\rangle$$

ou, de maneira mais geral,

$$\langle c_1\phi_1 + c_2\phi_2|\psi\rangle = c_1^* \langle\phi_1|\psi\rangle + c_2^* \langle\phi_2|\psi\rangle$$

Ortogonalidade

Dois vetores $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ são ditos *ortogonais* se seu produto escalar for zero:

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0$$

Norma

A *norma* do vetor $|\psi\rangle$ é definida por

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

- ▶ $\|\psi\| \leftrightarrow$ “comprimento”, “tamanho”, “módulo” do vetor $|\psi\rangle$
- ▶ $|\psi\rangle = c|\phi\rangle \implies \|\psi\| = |c| \|\phi\|$ ($|c|$ é o módulo do número c)
- ▶ $\|\psi\| = 0 \iff |\psi\rangle = 0$
- ▶ algumas vezes escreveremos $\| |\psi\rangle \|$ em vez de $\|\psi\|$

Ortonormalidade da base associada a uma grandeza física

Ao introduzir os vetores $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ que representam os estados com $A = a_1$ e $A = a_2$, postulamos que eles seriam ortogonais entre si e teriam norma unitária (formam um conjunto *ortonormal*):

$$\langle a_1|a_2\rangle = 0, \quad \||a_1\rangle\| = \||a_2\rangle\| = 1$$

Podemos escrever essas condições de forma mais sucinta e útil:

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$$

onde o *delta de Kronecker* é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O produto escalar em termos das componentes

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$

$$|\phi\rangle = d_1 |a_1\rangle + d_2 |a_2\rangle$$



$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^2 d_i^* c_j \langle a_i|a_j\rangle = \sum_{i,j=1}^2 d_i^* c_j \delta_{ij}$$



$$\langle\phi|\psi\rangle = d_1^* c_1 + d_2^* c_2$$

A norma em termos das componentes

$$\langle \phi | \psi \rangle = d_1^* c_1 + d_2^* c_2$$



$$\langle \psi | \psi \rangle = c_1^* c_1 + c_2^* c_2 = |c_1|^2 + |c_2|^2$$



$$\|\psi\| = \sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

As componentes em termos do produto escalar

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$



$$\langle a_i | \psi \rangle = \sum_{j=1}^2 c_j \langle a_i | a_j \rangle = \sum_{j=1}^2 c_j \delta_{ij}$$

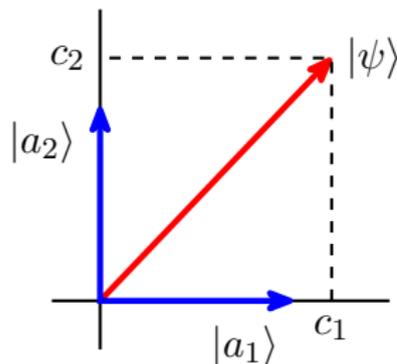


$$c_i = \langle a_i | \psi \rangle$$

A Regra de Born

A regra de Born

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$

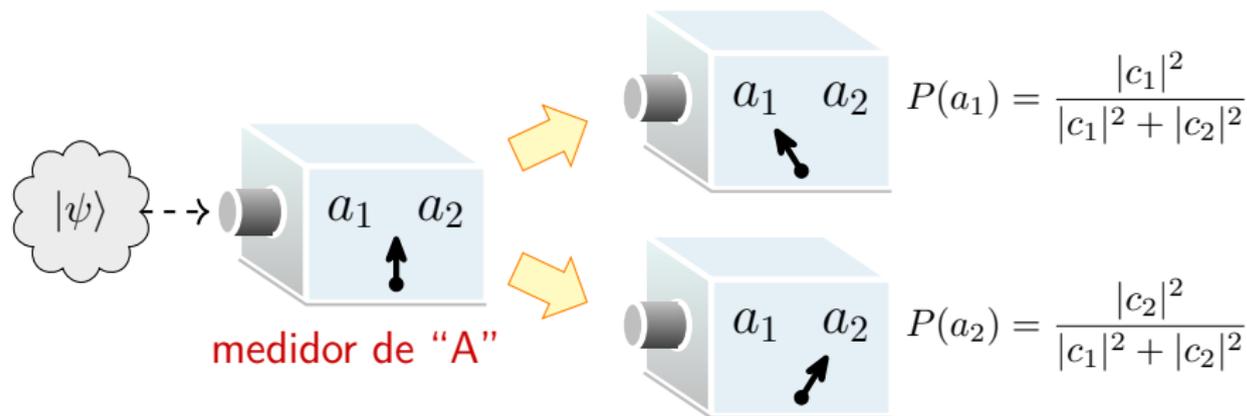


Para um sistema no estado $|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$, a probabilidade de uma medida de A resultar em a_n ($n = 1, 2$) é

$$P(a_n) = \frac{|c_n|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

A regra de Born

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$



A regra de Born

Como

$$c_n = \langle a_n | \psi \rangle$$

e

$$\|\psi\| = \sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

a regra de Born pode ser escrita como

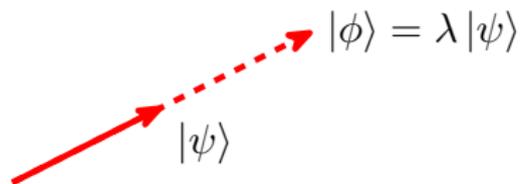
$$P(a_n) = \frac{|\langle a_n | \psi \rangle|^2}{\|\psi\|^2}$$

A probabilidade de qualquer resultado

A probabilidade da medida resultar em qualquer um dos resultados possíveis é 100%, como não poderia deixar de ser, pois

$$P(a_1) + P(a_2) = \frac{|c_1|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2} + \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2} = 1$$

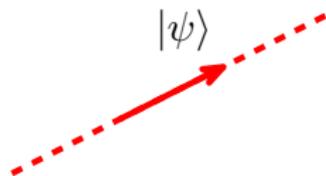
Normalização do vetor de estado



$$P(\phi \rightarrow a_n) = \frac{|\langle a_n | \phi \rangle|^2}{\|\phi\|^2} = \frac{|\lambda|^2 |\langle a_n | \psi \rangle|^2}{|\lambda|^2 \|\psi\|^2} = P(\psi \rightarrow a_n)$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ representam o mesmo estado físico!

Vetores normalizados



Todos os vetores ao longo de uma dada “direção” (um *raio* no espaço de estados) representam o mesmo estado físico.



Podemos trabalhar apenas com *vetores normalizados*:

$$\|\psi\| = 1$$

Vetores normalizados

- ▶ Para normalizar (à unidade) um vetor de estado $|\psi\rangle$, basta dividir o vetor pela sua norma:

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{|\psi\rangle}{\|\psi\|}$$

- ▶ Em termos das componentes,

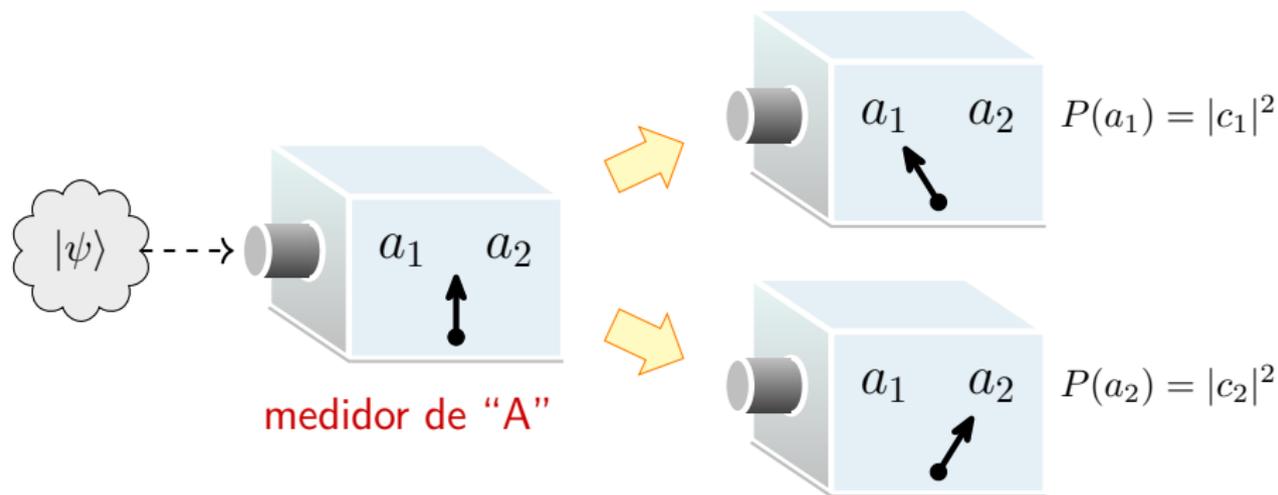
$$c_n \rightarrow \frac{c_n}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}$$

Fases global e relativa

- ▶ Mesmo com a normalização, ainda não há um único vetor representando o estado.
- ▶ Por exemplo, o estado físico descrito pelo vetor normalizado $|\psi\rangle$ é igualmente representado pelo vetor normalizado $-|\psi\rangle$.
- ▶ De maneira mais geral, os vetores $|\psi_\theta\rangle = e^{-i\theta} |\psi\rangle$ representam o mesmo estado físico para qualquer valor (real) da fase θ , já que $|e^{-i\theta}| = 1$.
- ▶ Um vetor de estado normalizado é definido a menos de um fator de fase global.
- ▶ Ao contrário da fase global, fases relativas em uma superposição de estados têm significado físico: os vetores $|\psi_\theta\rangle = |\phi_1\rangle + e^{-i\theta} |\phi_2\rangle$ não têm todos a mesma direção e representam estados físicos diferentes (considere $|\phi_1\rangle \pm |\phi_2\rangle$, por exemplo).

A regra de Born para vetores normalizados

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle \quad (\text{normalizado}) \implies P(a_n) = |c_n|^2$$



A regra de Born para vetores normalizados

Em termos do produto escalar, se $|\psi\rangle$ está normalizado a probabilidade é dada por

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$$

Amplitude de probabilidade

- ▶ $c_n = \langle a_n | \psi \rangle \leftrightarrow$ *amplitude de probabilidade*
- ▶ probabilidade = $|\textit{amplitude de probabilidade}|^2$

Exemplo: a “função de onda” (grandeza física = posição x)

$$\psi(x_n) = \langle x_n | \psi \rangle$$

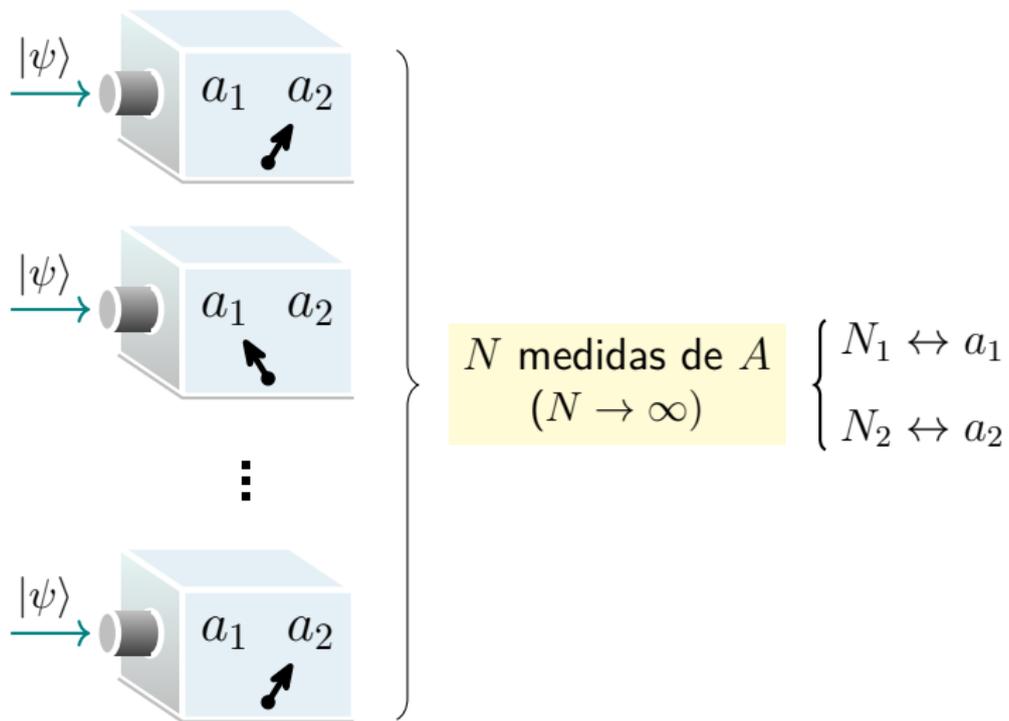
$$P(x_n) = |\psi(x_n)|^2$$

Amplitude de probabilidade

De maneira mais geral:

- ▶ $\langle \phi | \psi \rangle$ = amplitude de probabilidade de uma medida feita sobre um sistema no estado $|\psi\rangle$ ter como resultado o estado $|\phi\rangle$.
- ▶ $P(\psi \rightarrow \phi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$ = probabilidade de uma medida feita sobre um sistema no estado $|\psi\rangle$ ter como resultado o estado $|\phi\rangle$.
- ▶ $P(\psi \rightarrow \phi) = P(\phi \rightarrow \psi)$, embora $\langle \psi | \phi \rangle \neq \langle \phi | \psi \rangle$ (são conjugados).

O resultado de muitas medidas



Frequência de resultados em muitas medidas

- ▶ Mesmo conhecendo o vetor de estado

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$

geralmente é impossível prever o resultado da próxima medida.

- ▶ A regra de Born prevê a frequência dos resultados em um número muito grande de medidas:

$$\frac{N_1}{N} = P(a_1) = |c_1|^2$$

$$\frac{N_2}{N} = P(a_2) = |c_2|^2$$

Valor médio de muitas medidas

- ▶ O valor médio de A nas N medidas é

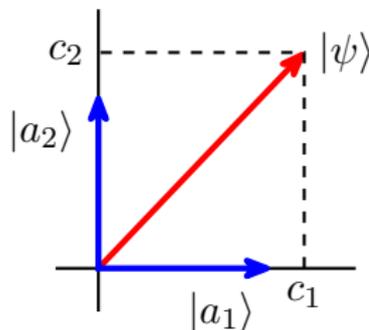
$$\langle A \rangle = \frac{N_1 a_1 + N_2 a_2}{N}$$

- ▶ Com a regra de Born podemos prever o valor médio de A :

$$\langle A \rangle = |c_1|^2 a_1 + |c_2|^2 a_2$$

Incerteza

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle$$



- ▶ $c_1, c_2 \neq 0 \iff$ impossível prever o resultado da medida
- ▶ $\left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \quad (\implies |c_2| = 1) \\ c_2 = 0 \quad (\implies |c_1| = 1) \end{array} \right\} \iff$ é possível prever o resultado

Incerteza

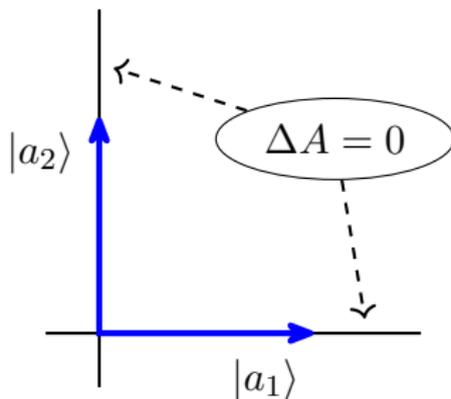
- ▶ Se é possível prever o resultado da medida, dizemos que o valor de A está *bem definido* no estado $|\psi\rangle$.
- ▶ Se não é possível prever o resultado da medida, dizemos que o valor de A tem uma *incerteza*.

Incerteza ΔA no estado $|\psi\rangle$

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

Incerteza nula

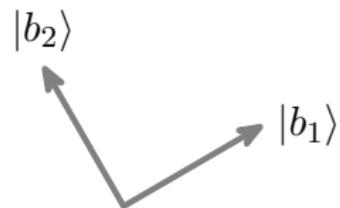
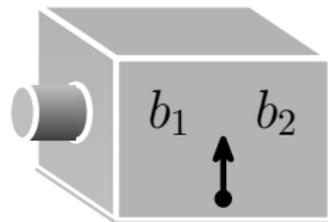
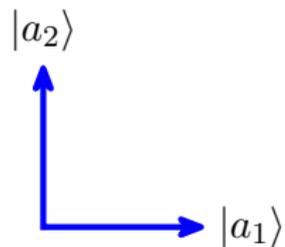
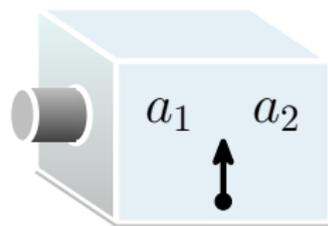
$\Delta A = 0 \iff$ é possível prever o resultado de uma medida de A
 $\iff c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$



Complementaridade e o Princípio da Incerteza

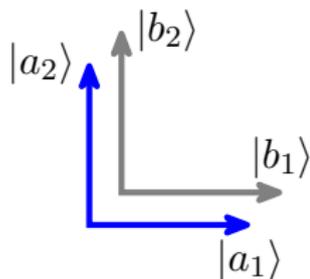
Complementaridade

Duas grandezas físicas: A e B

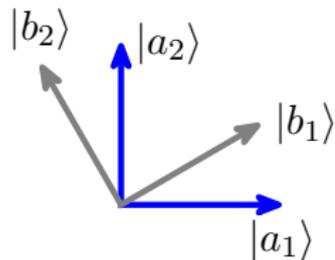


Grandezas compatíveis e incompatíveis

A e B compatíveis

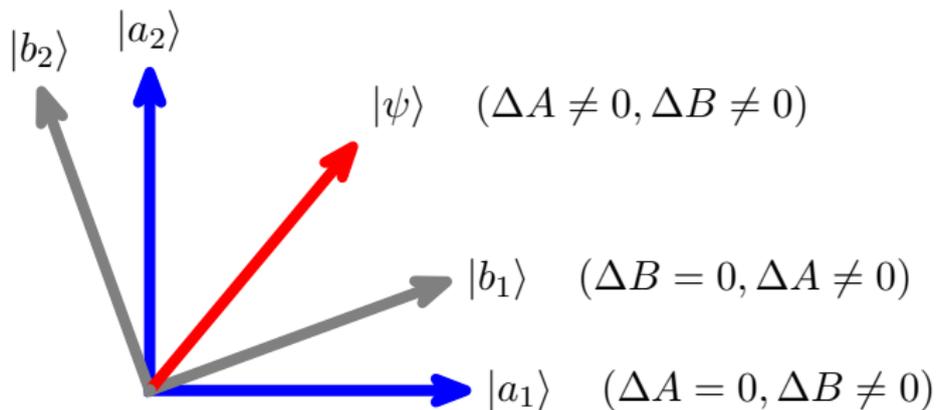


A e B incompatíveis



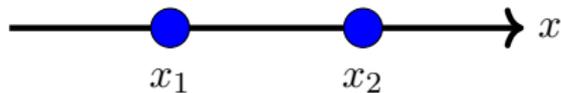
A e B complementares: incompatibilidade “máxima”

Princípio da incerteza

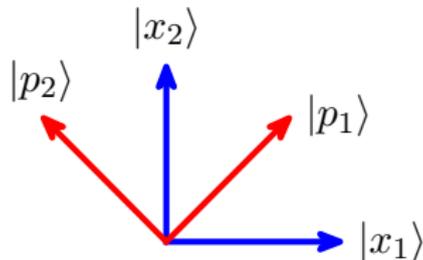


A e B incompatíveis \implies nenhum estado $|\psi\rangle$ com $\Delta A = 0$ e $\Delta B = 0$

Exemplo: posição e momentum



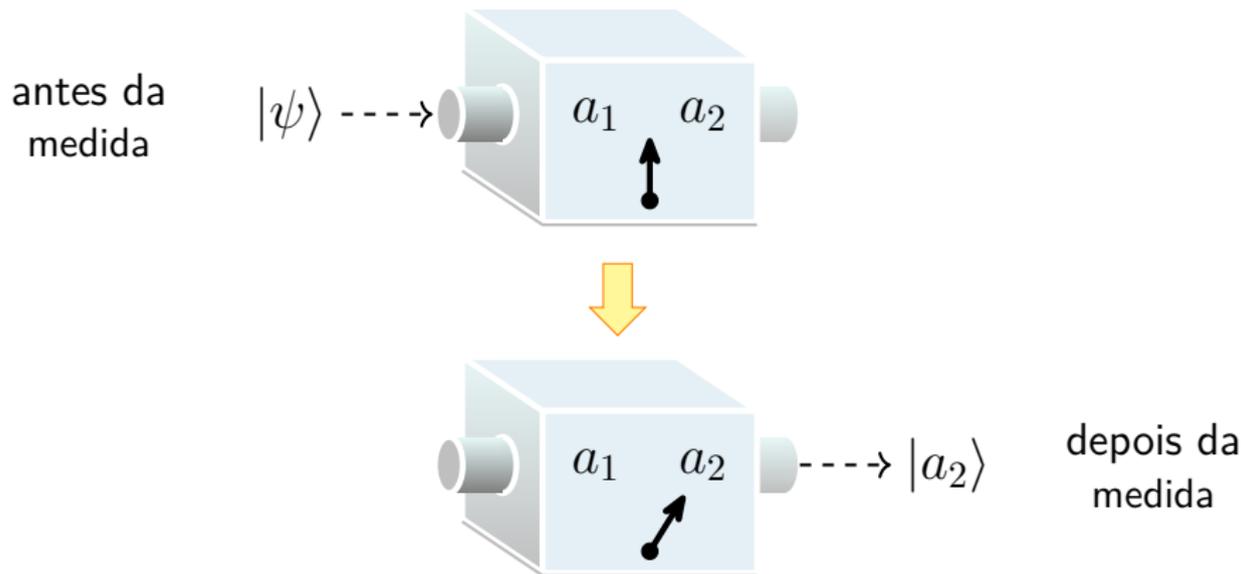
- ▶ Duas posições: $|x_1\rangle$ e $|x_2\rangle$ (“aqui” e “ali”)
- ▶ Dois estados de movimento: $|p_1\rangle$ e $|p_2\rangle$ (“repouso” e “movimento”)



é impossível ter um estado com posição e momentum bem definidos

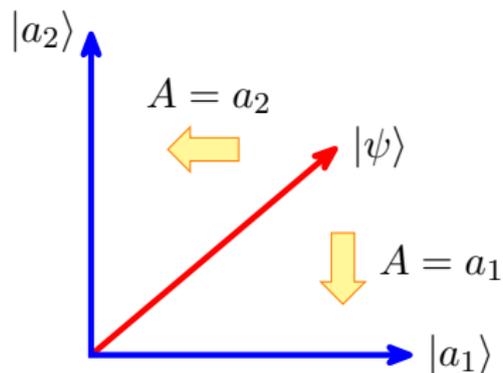
Redução do Vetor de Estado

O vetor de estado após a medida



Redução do vetor de estado

Se uma medida resulta em $A = a_n$, logo após a medida o estado do sistema deve ser $|a_n\rangle$.



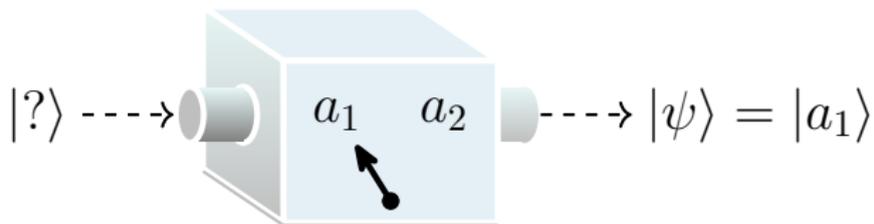
Repetibilidade

- ▶ O colapso para $|a_n\rangle$ garante que a medida é repetível: se a refizermos logo em seguida encontraremos $A = a_n$ novamente, com 100% de probabilidade.
- ▶ Na prática, em muitos aparatos de medida, o colapso correspondente ao resultado $A = a_n$ não leva ao estado $|a_n\rangle$, mas para algum outro estado $|\chi_n\rangle$. Por exemplo:
 - Um fóton geralmente é absorvido durante sua detecção; não há mais fóton após a primeira medida e o estado final é “zero fótons”.
 - A energia de um nêutron pode ser medida pelo recuo de um próton com o qual o nêutron colide (em uma câmara de bolhas, por exemplo). Após a colisão a energia do nêutron não tem mais o valor inicial.

Em casos como esses há um colapso mas a medida não é repetível.

Preparação de estados

- ▶ A redução do vetor de estado permite colocar o sistema em um estado conhecido.
- ▶ Preparação da “condição inicial” em experimentos.



Medidas simultâneas de duas grandezas

A e B incompatíveis:

- ▶ É impossível construir um aparato capaz de realizar medidas simultâneas e *repetíveis* de A e B .
- ▶ É impossível construir um aparato capaz de preparar o sistema em um estado com A e B bem definidos.

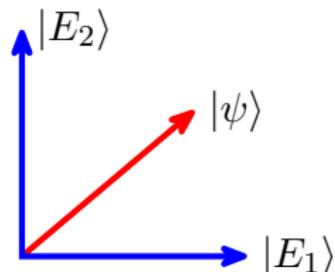
Evolução Unitária

Dinâmica quântica

- ▶ Evolução temporal do vetor de estado: $|\psi(0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$
- ▶ A dinâmica quântica é determinada pela energia do sistema (o conceito de força é pouco relevante).

A (solução da) equação de Schroedinger

Sistema de dois estados
↓
Dois níveis de energia: E_1 e E_2



$$|\psi(0)\rangle = c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle$$



$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle$$

A (solução da) equação de Schroedinger

- ▶ $\hbar =$ constante de Planck ($/2\pi$) $\approx 1 \times 10^{-34}$ Js
- ▶ Números complexos são inevitáveis. Mesmo que as componentes do vetor de estado sejam reais em $t = 0$, para $t \neq 0$ elas serão complexas:

$$c_n(t) = c_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

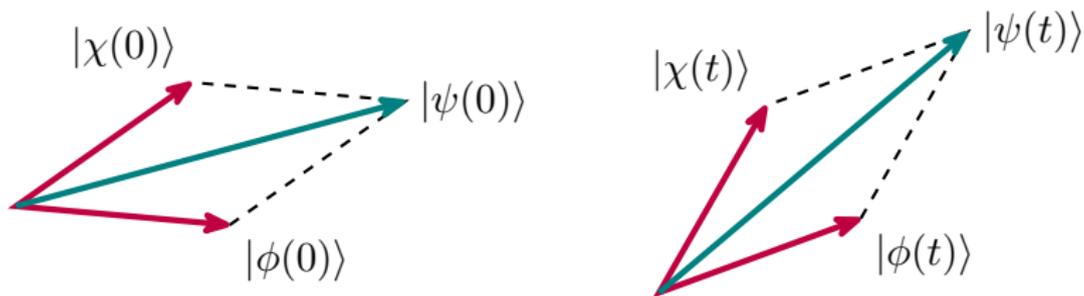
- ▶ A evolução $|\psi(0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$ ditada pela equação de Schroedinger é *contínua* (sem 'saltos quânticos') e *determinística* (sem elementos probabilísticos).

Propriedades da (solução da) equação de Schroedinger

Linearidade

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |\phi(0)\rangle + \beta |\chi(0)\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} |\phi(0)\rangle \rightarrow |\phi(t)\rangle \\ |\chi(0)\rangle \rightarrow |\chi(t)\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \alpha |\phi(t)\rangle + \beta |\chi(t)\rangle$$



Propriedades da (solução da) equação de Schroedinger

- Demonstração:

$$|\phi(0)\rangle = c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle ,$$

$$|\chi(0)\rangle = d_1 |E_1\rangle + d_2 |E_2\rangle$$

$$\begin{aligned}\implies |\psi(0)\rangle &= \alpha |\phi(0)\rangle + \beta |\chi(0)\rangle \\ &= (\alpha c_1 + \beta d_1) |E_1\rangle + (\alpha c_2 + \beta d_2) |E_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies |\psi(t)\rangle &= (\alpha c_1 + \beta d_1)e^{-iE_1t/\hbar} |E_1\rangle + (\alpha c_2 + \beta d_2)e^{-iE_2t/\hbar} |E_2\rangle \\ &= \alpha \left(c_1 e^{-iE_1t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2t/\hbar} |E_2\rangle \right) \\ &\quad + \beta \left(d_1 e^{-iE_1t/\hbar} |E_1\rangle + d_2 e^{-iE_2t/\hbar} |E_2\rangle \right) \\ &= \alpha |\phi(t)\rangle + \beta |\chi(t)\rangle\end{aligned}$$

Propriedades da (solução da) equação de Schroedinger

Conservação do produto escalar

$$\langle \phi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \phi(0) | \psi(0) \rangle$$

⇒ Conservação da norma

$$\|\psi(t)\| = \|\psi(0)\|$$

⇒ Conservação da ortogonalidade

$$|\psi(0)\rangle \text{ ortogonal a } |\phi(0)\rangle \iff |\psi(t)\rangle \text{ ortogonal a } |\phi(t)\rangle$$

Propriedades da (solução da) equação de Schroedinger

- Demonstração:

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle ,$$

$$|\phi(t)\rangle = d_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + d_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle$$

$$\begin{aligned} \implies \langle \phi(t) | \psi(t) \rangle &= \left(d_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \right)^* \left(c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \right) \\ &\quad + \left(d_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right)^* \left(c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \\ &= d_1^* c_1 + d_2^* c_2 \\ &= \langle \phi(0) | \psi(0) \rangle \end{aligned}$$

Propriedades da (solução da) equação de Schroedinger

Evolução unitária:

- ▶ Determinismo
- ▶ Continuidade
- ▶ Linearidade
- ▶ Conservação do produto escalar
 - Conservação da norma
 - Conservação da ortogonalidade

Estados estacionários

- ▶ Estado de energia bem definida E_n :

$$|\psi(0)\rangle = |E_n\rangle \implies |\psi(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle$$

- ▶ $|\psi(0)\rangle$ e $|\psi(t)\rangle$ diferem por um fator de fase $\implies |\psi(0)\rangle$ e $|\psi(t)\rangle$ representam o mesmo estado físico.
- ▶ Estados de energia bem definida são “estados estacionários”.

Conservação da energia

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle$$

$$P(E_n, t) = |c_n e^{-iE_n t/\hbar}|^2 = |c_n|^2$$

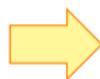
$$\begin{aligned}\langle E \rangle_{\psi(t)} &= |c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|^2 E_1 + |c_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 E_2 \\ &= |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(E_n, t) = P(E_n, 0) \\ \langle E \rangle_{\psi(t)} = \langle E \rangle_{\psi(0)} \end{cases}$$

A energia é conservada, em média.

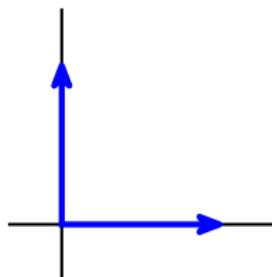
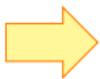
Resumo: cinemática e dinâmica quânticas

estado físico



vetor no espaço
de estados

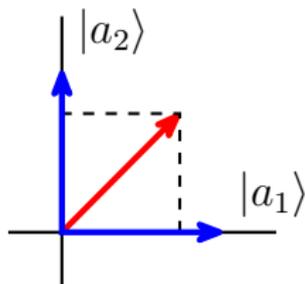
grandeza física



sistema de eixos
(base) no espaço
de estados

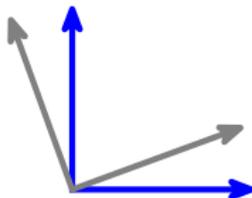
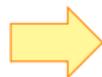
Resumo: cinemática e dinâmica quânticas

probabilidade de
uma medida de
 A resultar em a_n



“proximidade” do
vetor de estado ao
eixo $|a_n\rangle$

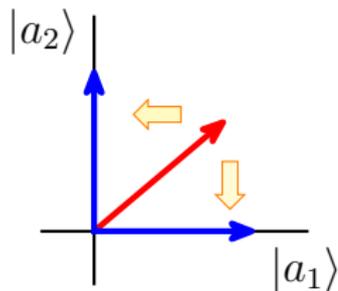
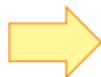
grandezas físicas
incompatíveis



diferentes sistemas
de eixos no espaço
de estados

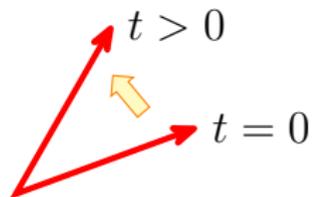
Resumo: cinemática e dinâmica quânticas

medida resultando
em $A = a_n$



“colapso” para
o eixo $|a_n\rangle$

evolução temporal



evolução unitária
(equação de
Schroedinger)

O Processo de Medida e a Transição Quântico-Clássico

Redução do vetor de estado \times evolução unitária

Redução do vetor de estado:

- ▶ Descontínua
- ▶ Probabilística
- ▶ Ocorre durante o processo de medida

Evolução unitária:

- ▶ Contínua
- ▶ Determinística
- ▶ Válida enquanto não se faz uma medida

Dois tipos de evolução temporal?

Redução do vetor de estado:

- ▶ Interação do sistema quântico com um *aparato clássico*, o aparelho de medida ou “observador”.
- ▶ $A = a_1$ ou a_2 (medida resulta em um único valor)

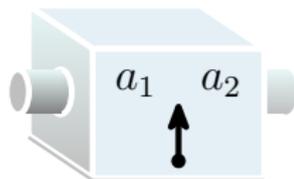
Evolução unitária:

- ▶ Interação do sistema quântico com outro sistema quântico.
- ▶ $A = a_1$ e a_2 (superposição quântica de estados)

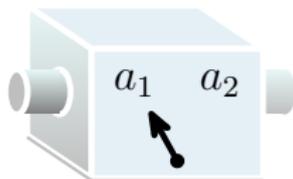
O “problema da medida”

Por que o processo de medida não segue a evolução unitária?

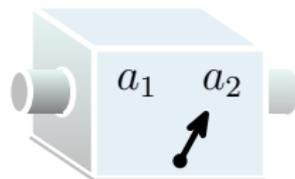
Descrição quântica do aparelho de medida:



$|\uparrow\rangle$



$|\swarrow\rangle$



$|\searrow\rangle$

O “problema da medida”

- ▶ Se aparato é um bom aparelho de medida:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{antes da medida} & |a_1 \uparrow\rangle \rightarrow |a_1 \swarrow\rangle & \text{depois da medida} \\
 & |a_2 \uparrow\rangle \rightarrow |a_2 \nearrow\rangle &
 \end{array}$$

- ▶ Se a evolução unitária for aplicável ao aparelho de medida:

$$c_1 |a_1 \uparrow\rangle + c_2 |a_2 \uparrow\rangle \rightarrow c_1 |a_1 \swarrow\rangle + c_2 |a_2 \nearrow\rangle$$

⇒ o ponteiro aponta em duas direções ao mesmo tempo!

O “problema da medida”

- ▶ Por que as superposições quânticas não são encontradas no mundo macroscópico?
 - Jamais se observou um ponteiro macroscópico apontando em duas direções ao mesmo tempo.
 - Um gato não pode estar simultaneamente vivo e morto.
- ▶ Como conciliar o espaço quântico de infinitos estados com a observação de apenas alguns poucos estados macroscópicos?

Uma descrição do processo de medida baseada na evolução unitária deve necessariamente dar resposta a essas questões.

Física quântica × física clássica

- ▶ Por medida, na mecânica quântica, nós entendemos qualquer processo de interação entre objetos clássicos e quânticos. . .
 - L. Landau & E. Lifshitz, *Quantum Mechanics*
- ▶ . . . os instrumentos de medida, para funcionarem como tal, não podem ser propriamente incluídos no domínio de aplicação da mecânica quântica.
 - N. Bohr, *carta a Schroedinger, 26 de outubro de 1935*
- ▶ . . . o ‘aparato’ não deveria ser separado do resto do mundo em uma caixa preta, como se não fosse feito de átomos e não fosse governado pela mecânica quântica.
 - J. Bell, *Against measurement*

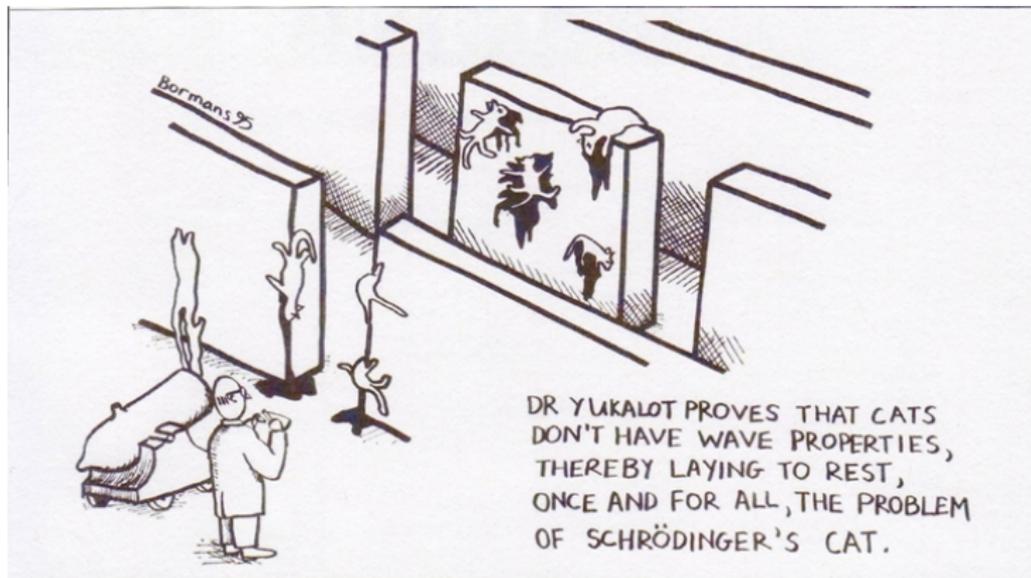
Física quântica × física clássica



... a mecânica quântica ocupa um lugar muito incomum entre as teorias físicas: ela contém a mecânica clássica como um caso limite, mas ao mesmo tempo requer esse caso limite para sua própria formulação...

– L. Landau & E. Lifshitz, *Quantum Mechanics*

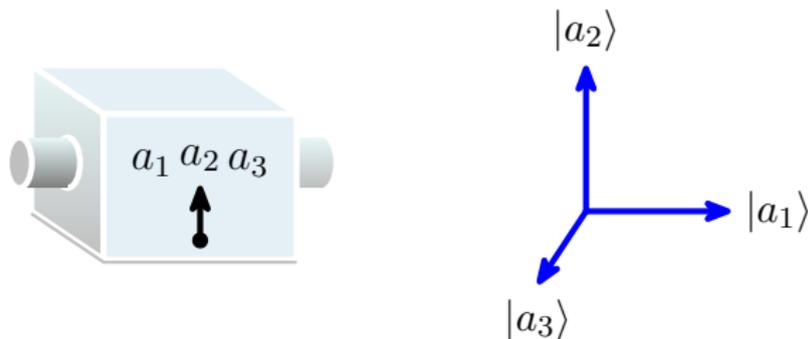
Os gatos de Schroedinger



Sistemas com Mais de Dois Estados

Sistemas de 3 estados

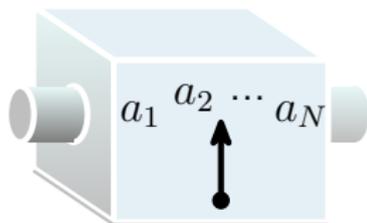
Três valores possíveis para a grandeza A :



- ▶ base ortonormal: $\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, 3$
- ▶ superposição: $|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle + c_3 |a_3\rangle$
- ▶ amplitude de probabilidade: $c_n = \langle a_n | \psi \rangle$
- ▶ probabilidade $P(a_n) = |c_n|^2$

Sistemas de N estados

N valores possíveis para a grandeza A :



- ▶ base ortonormal: $\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, \dots, N$
- ▶ superposição: $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle$
- ▶ amplitude de probabilidade: $c_n = \langle a_n | \psi \rangle$
- ▶ probabilidade $P(a_n) = |c_n|^2$

Sistemas de infinitos estados

N pode ser infinito:

- ▶ base ortonormal: $\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$
- ▶ superposição: $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |a_n\rangle$
- ▶ amplitude de probabilidade: $c_n = \langle a_n | \psi \rangle$
- ▶ probabilidade $P(a_n) = |c_n|^2$

Sistemas de infinitos estados

N pode ser infinito, e os valores de a contínuos:

- ▶ superposição: $|\psi\rangle = \int da c(a) |a\rangle$
- ▶ amplitude de probabilidade: $c(a) = \langle a|\psi\rangle$
- ▶ densidade de probabilidade: $\rho(a) = |c(a)|^2$
- ▶ probabilidade: $P(a_1, a_2) = \int_{a_1}^{a_2} da |c(a)|^2$
- ▶ base ortonormal: $\langle a|a'\rangle = \delta(a - a') \leftrightarrow$ função delta de Dirac

A função delta de Dirac

“Definição”:

$$\delta(x - c) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ \infty, & x = c \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - c) = f(c)$$

Comparação com a delta de Kronecker:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \delta_{mn} = F_n$$

Sistemas de infinitos estados: a função de onda

Exemplo: x = posição de uma partícula

- ▶ base ortonormal: $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$
- ▶ superposição: $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle$
- ▶ amplitude de probabilidade: $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \leftrightarrow$ função de onda
- ▶ densidade de probabilidade: $\rho(x) = |\psi(x)|^2$
- ▶ probabilidade: $P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx |\psi(x)|^2$

Onipresença quântica

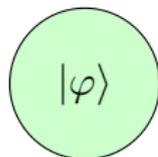


Sistemas Compostos e Emaranhamento

Sistemas individuais



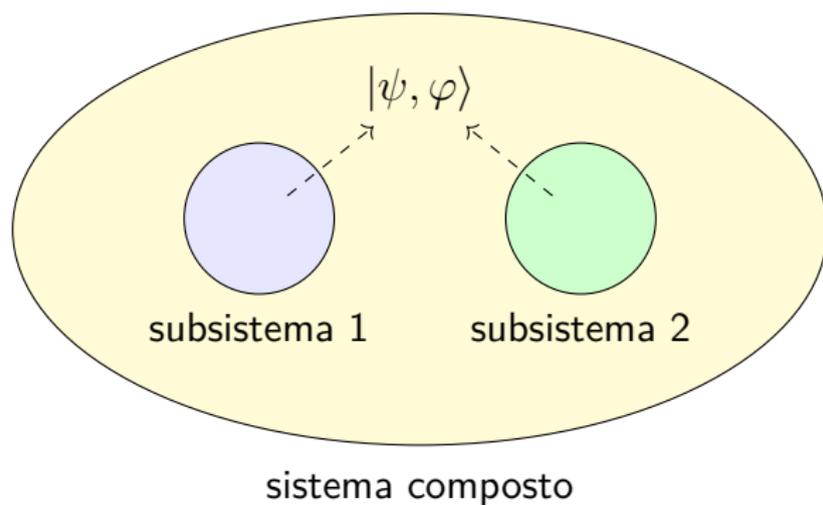
sistema 1



sistema 2

- ▶ $|\psi\rangle$: estado do sistema 1
- ▶ $|\varphi\rangle$: estado do sistema 2

Sistema composto



Estados *separáveis*:

$|\psi, \varphi\rangle$: subsistema 1 no estado $|\psi\rangle$, subsistema 2 no estado $|\varphi\rangle$

Estados separáveis

- ▶ Superposição no subsistema 1:

$$|a\psi + b\psi', \varphi\rangle = a |\psi, \varphi\rangle + b |\psi', \varphi\rangle$$

- ▶ Superposição no subsistema 2:

$$|\psi, c\varphi + d\varphi'\rangle = c |\psi, \varphi\rangle + d |\psi, \varphi'\rangle$$

Essas propriedades tornam natural definir um “produto” de estados.

Produto tensorial

$$|\psi, \varphi\rangle \equiv |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle_1 |\varphi\rangle_2$$

O produto tensorial \otimes é, por definição, “linear”:

- ▶ $(a|\psi\rangle_1 + b|\psi'\rangle_1) \otimes |\varphi\rangle_2 = a|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 + b|\psi'\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$
- ▶ $|\psi\rangle_1 \otimes (c|\varphi\rangle_2 + d|\varphi'\rangle_2) = c|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 + d|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi'\rangle_2$

\implies resultado esperado para a superposição em um dos subsistemas

Base do espaço de estados do sistema composto

- ▶ Base ortonormal no espaço do sistema 1: $|a_m\rangle$, $m = 1, 2, \dots$
Base ortonormal no espaço do sistema 2: $|b_n\rangle$, $n = 1, 2, \dots$
- ▶ Base ortonormal no espaço de estados do sistema composto:

$$|a_m, b_n\rangle = |a_m\rangle_1 \otimes |b_n\rangle_2$$

- ▶ Relação de ortonormalidade:

$$\langle a_m, b_n | a_i, b_j \rangle = \delta_{mi} \delta_{nj}$$

Espaço de estados do sistema composto

- ▶ Vetor do espaço de estados do sistema composto:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |a_m, b_n\rangle \equiv \sum_{m,n} c_{mn} |a_m\rangle_1 \otimes |b_n\rangle_2$$

- ▶ Amplitude de probabilidade: $c_{mn} = \langle a_m, b_n | \Psi \rangle$
- ▶ Espaço de estados do sistema composto: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
 → *produto tensorial* dos espaços de estados dos sistemas 1 e 2
- ▶ dimensão de $\mathcal{H}_1 = N$, dimensão de $\mathcal{H}_2 = M$
 - ⇒ N vetores na base $|a_m\rangle$, M vetores na base $|b_n\rangle$
 - ⇒ $N \times M$ vetores na base $|a_m, b_n\rangle$
 - ⇒ dimensão de $\mathcal{H} = N \times M$

Estados separáveis

- ▶ Estados dos sistemas 1 e 2:

$$|\psi\rangle_1 = \sum_m \alpha_m |a_m\rangle_1, \quad |\varphi\rangle_2 = \sum_n \beta_n |b_n\rangle_2$$

- ▶ Estado separável do sistema composto:

$$\begin{aligned} |\psi, \varphi\rangle &= |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \\ &= \left(\sum_m \alpha_m |a_m\rangle_1 \right) \otimes \left(\sum_n \beta_n |b_n\rangle_2 \right) \\ &= \sum_{m,n} \alpha_m \beta_n |a_m\rangle_1 \otimes |b_n\rangle_2 \\ &= \sum_{m,n} \alpha_m \beta_n |a_m, b_n\rangle \end{aligned}$$

Amplitudes em estados separáveis

- ▶ Amplitudes do estado separável:

$$c_{mn} = \alpha_m \beta_n$$

ou, em termos dos produtos escalares,

$$\langle a_m, b_n | \psi, \varphi \rangle = {}_1\langle a_m | \psi \rangle_1 {}_2\langle b_n | \varphi \rangle_2$$

- ▶ De forma geral:

$$\langle \psi', \varphi' | \psi, \varphi \rangle = {}_1\langle \psi' | \psi \rangle_1 {}_2\langle \varphi' | \varphi \rangle_2$$

Estados emaranhados

- ▶ Nem todo estado é separável, pois nem sempre é possível encontrar números α_m e β_n tais que $c_{mn} = \alpha_m \beta_n$.

- ▶ Estados não-separáveis, para os quais

$$c_{mn} \neq \alpha_m \beta_n ,$$

são chamados de *estados emaranhados*.

Estados emaranhados

Exemplo de estado emaranhado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a_1, b_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |a_2, b_1\rangle$$

Se $|\Psi\rangle$ fosse separável deveríamos ter

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_2 &= \alpha_2\beta_1 = 1/\sqrt{2}, \\ \alpha_1\beta_1 &= \alpha_2\beta_2 = 0,\end{aligned}$$

o que é impossível, pois a primeira equação diz que todos os α 's e β 's são diferentes de zero, e a segunda diz que pelo menos dois deles são nulos.

Estados emaranhados

Outro exemplo: a função de onda de duas partículas

$$|\Psi\rangle = \int dx_1 dx_2 \Psi(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle$$

O estado $|\Psi\rangle$ é separável se

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\varphi(x_2)$$

Se $\Psi(x_1, x_2) \neq \psi(x_1)\varphi(x_2)$, o estado $|\Psi\rangle$ é emaranhado.

Estados emaranhados

- ▶ Não é possível associar vetores de estado aos subsistemas individuais.
- ▶ Os subsistemas emaranhados devem ser tratados como um único objeto, mesmo quando estão separados por distâncias macroscópicas.
- ▶ O emaranhamento é responsável por alguns dos mais estranhos e surpreendentes aspectos da mecânica quântica.

Emaranhamento

“O melhor conhecimento possível de um todo não inclui o melhor conhecimento possível de suas partes, nem mesmo quando essas estão completamente separadas umas das outras e no momento não influenciam umas às outras.”

- E. Schroedinger, *The Present Situation in Quantum Mechanics*
(o artigo de 1935 onde aparece o gato de Schroedinger)

Par emaranhado



Sistemas Quânticos Simples

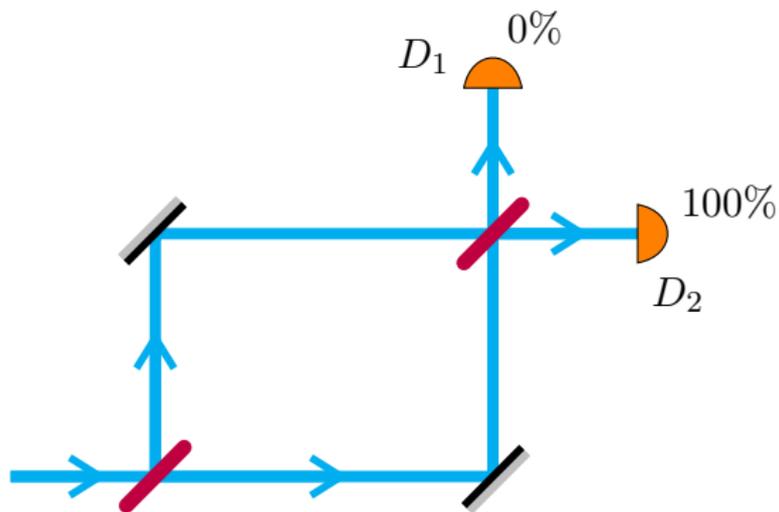


Sumário

- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
- Princípios da Mecânica Quântica
- Sistemas Quânticos Simples
 - Interferômetro de Mach-Zehnder
 - Caminhos indistinguíveis no interferômetro
 - Medida sem interação
 - O problema de Deutsch
- Realismo, Contextualidade e Não-localidade

Interferômetro de Mach-Zehnder

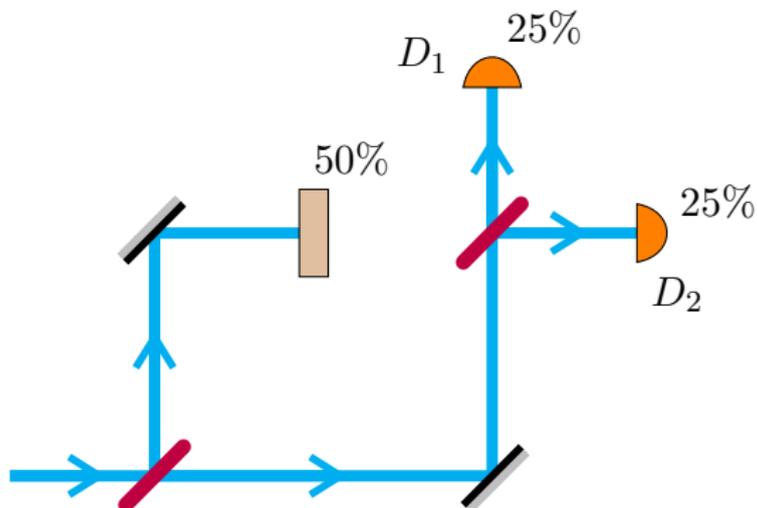
Interferômetro de Mach-Zehnder



“Ondas”

- ▶ D_1 : interferência destrutiva
- ▶ D_2 : interferência construtiva

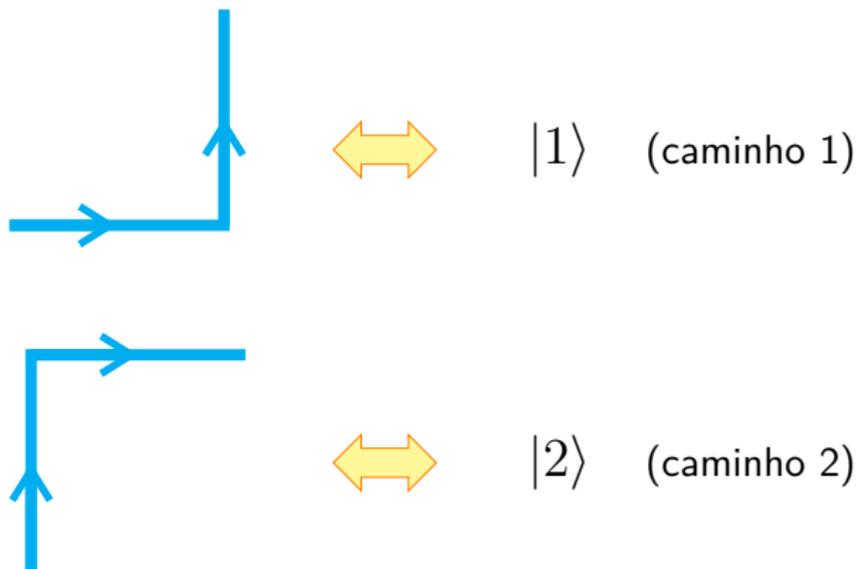
Anticoincidência



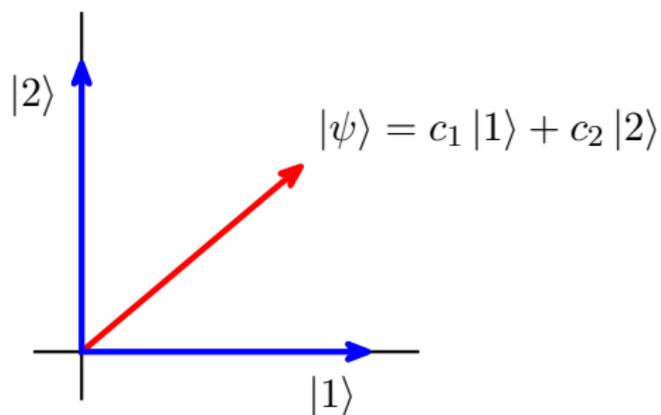
“Partículas”

- ▶ D_1 e D_2 nunca disparam simultaneamente

Descrição quântica do interferômetro

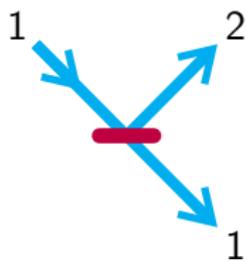


Espaço de estados

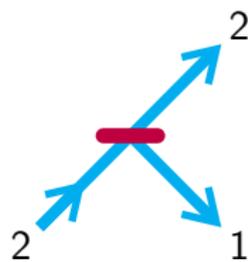


probabilidades:
$$\begin{cases} P_1 = |c_1|^2 \\ P_2 = |c_2|^2 \end{cases}$$

Transmissão e reflexão pelo semiespelho



$$|1\rangle \rightarrow t|1\rangle + r|2\rangle$$



$$|2\rangle \rightarrow r|1\rangle + t|2\rangle$$

- ▶ t = amplitude de transmissão pelo semiespelho
- ▶ r = amplitude de reflexão pelo semiespelho

Evolução unitária no semiespelho

$$|1\rangle \rightarrow |S_1\rangle = t|1\rangle + r|2\rangle$$

$$|2\rangle \rightarrow |S_2\rangle = r|1\rangle + t|2\rangle$$

$$\langle S_1|S_1\rangle = \langle S_2|S_2\rangle = |t|^2 + |r|^2$$

$$\langle S_1|S_2\rangle = t^*r + r^*t$$

Evolução unitária:

- ▶ Linearidade: $c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \rightarrow c_1|S_1\rangle + c_2|S_2\rangle$
- ▶ Conservação do produto escalar:
 - $\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1 \implies |t|^2 + |r|^2 = 1$
 - $\langle 1|2\rangle = 0 \implies t^*r + r^*t = 0$

Amplitudes de transmissão e reflexão

- ▶ Fases de r e t : $r = |r|e^{i\alpha}$, $t = |t|e^{i\beta}$

$$t^*r + r^*t = 0 \implies e^{2i(\alpha-\beta)} = -1$$

$$\implies \alpha - \beta = \pm\pi/2$$

- ▶ Semiespelho 50–50%: $|r| = |t|$

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \implies |r| = |t| = 1/\sqrt{2}$$

$$\implies \begin{cases} r = e^{i\alpha}/\sqrt{2} \\ t = e^{i\beta}/\sqrt{2} \end{cases}$$

Amplitudes de transmissão e reflexão

- Escolha das fases:

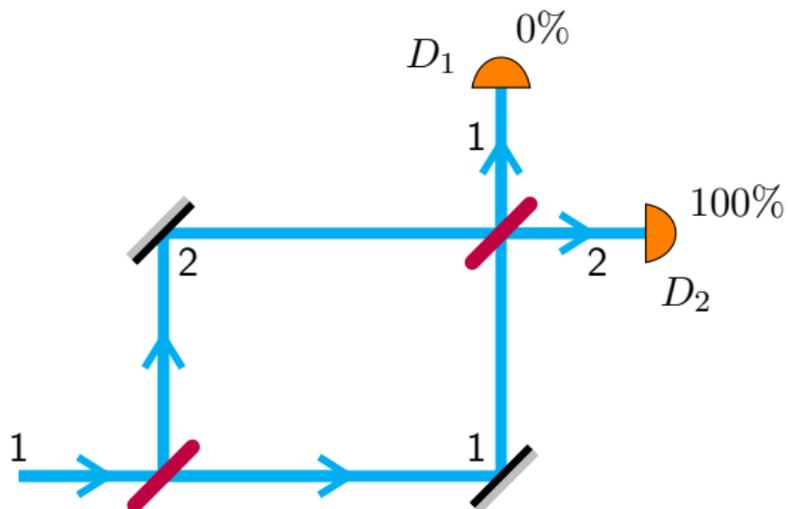
$$\alpha = \pi/2, \beta = 0 \implies \begin{cases} r = \frac{i}{\sqrt{2}} \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$$|1\rangle \rightarrow |S_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle$$

$$|2\rangle \rightarrow |S_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle$$

Interferômetro de Mach-Zehnder



Passagem pelo interferômetro

▶ Estado inicial: $|\psi_{inicial}\rangle = |1\rangle$

▶ Primeiro semiespelho:

$$|1\rangle \rightarrow |S_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle$$

Passagem pelo interferômetro

- Segundo semiespelho:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|S_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|S_2\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) |1\rangle + \left(\frac{i}{2} + \frac{i}{2} \right) |2\rangle = i|2\rangle
 \end{aligned}$$

“interferência destrutiva”

“interferência construtiva”

Saída do interferômetro

▶ Estado final: $|\psi_{final}\rangle = i|2\rangle$

▶ Amplitudes de probabilidade:

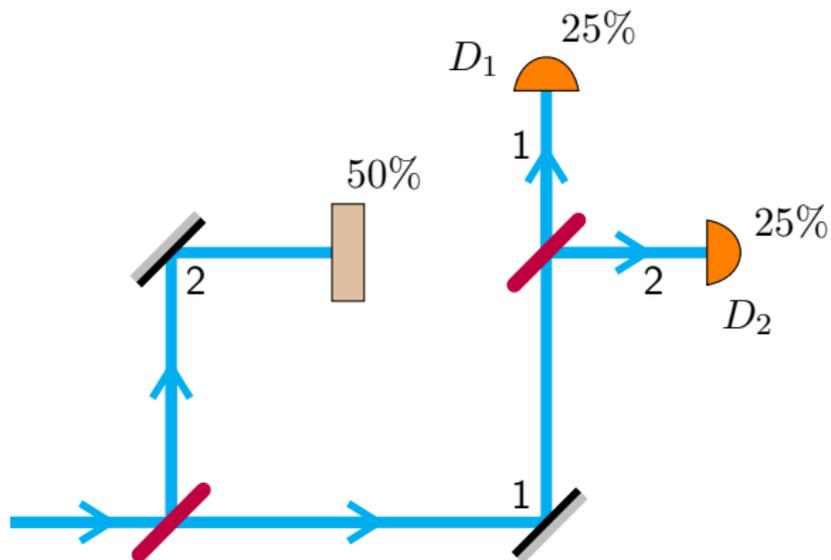
$$\begin{cases} \langle 1|\psi_{final}\rangle = 0 \\ \langle 2|\psi_{final}\rangle = i \end{cases}$$

▶ Probabilidades:

$$\begin{cases} P(D_1) = 0 \\ P(D_2) = |i|^2 = 1 \end{cases}$$

O mesmo resultado do experimento!

Caminho bloqueado



Caminho bloqueado

▶ Estado inicial: $|\psi_{inicial}\rangle = |1\rangle$

▶ Primeiro semiespelho:

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle$$

▶ Bloqueio:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\otimes\rangle$$

fóton bloqueado

Caminho bloqueado

- ▶ Segundo semiespelho:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle$$


- ▶ Estado final: $|\psi_{final}\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle$

Não há interferência.

Caminho bloqueado

- ▶ Amplitudes de probabilidade:

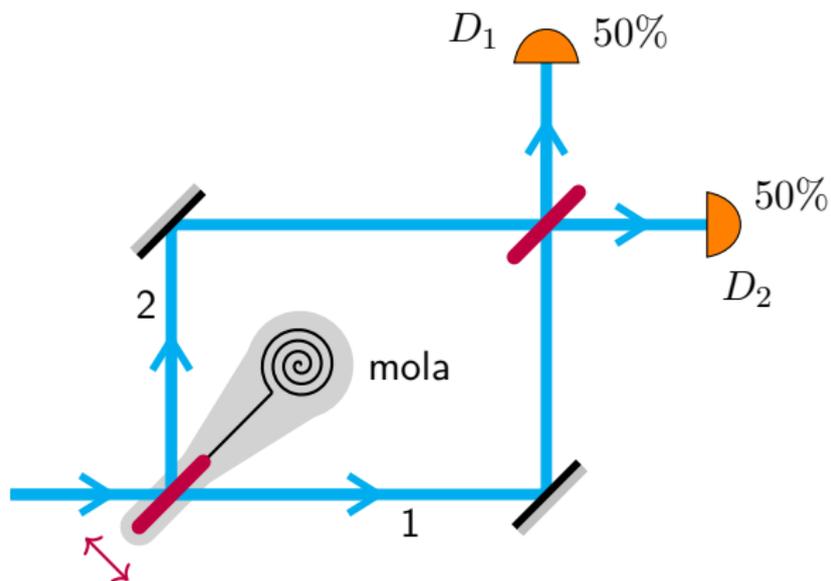
$$\begin{cases} \langle 1 | \psi_{final} \rangle = 1/2 \\ \langle 2 | \psi_{final} \rangle = i/2 \\ \langle \otimes | \psi_{final} \rangle = i/\sqrt{2} \end{cases}$$

- ▶ Probabilidades:

$$\begin{cases} P(D_1) = 1/4 = 25\% \\ P(D_2) = 1/4 = 25\% \\ P(\otimes) = 1/2 = 50\% \end{cases}$$

O mesmo resultado do experimento!

Caminhos alternativos distinguíveis



- ▶ mola não perturbada \leftrightarrow caminho 1
- ▶ mola vibrando \leftrightarrow caminho 2

Caminhos alternativos distinguíveis

$$\text{Quatro estados: } \left\{ \begin{array}{ll} |1, Z\rangle & \leftrightarrow \text{ caminho 1, mola não perturbada} \\ |1, V\rangle & \leftrightarrow \text{ caminho 1, mola vibrando} \\ |2, Z\rangle & \leftrightarrow \text{ caminho 2, mola não perturbada} \\ |2, V\rangle & \leftrightarrow \text{ caminho 2, mola vibrando} \end{array} \right.$$

- ▶ Estado inicial: $|\psi_{inicial}\rangle = |1, Z\rangle$
- ▶ Primeiro semiespelho: $|1, Z\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2, V\rangle$

Caminhos alternativos distinguíveis

- ▶ Segundo semiespelho:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2, V\rangle \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2, Z\rangle \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1, V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2, V\rangle \right)$$

- ▶ Estado final:

$$|\psi_{final}\rangle = \frac{1}{2}|1, Z\rangle + \frac{i}{2}|2, Z\rangle - \frac{1}{2}|1, V\rangle + \frac{i}{2}|2, V\rangle$$

A interferência desapareceu!

Caminhos alternativos distinguíveis

- ▶ Amplitudes de probabilidade:

$$\begin{cases} \langle 1Z | \psi_{final} \rangle = 1/2, & \langle 1V | \psi_{final} \rangle = -1/2 \\ \langle 2Z | \psi_{final} \rangle = i/2, & \langle 2V | \psi_{final} \rangle = i/2 \end{cases}$$

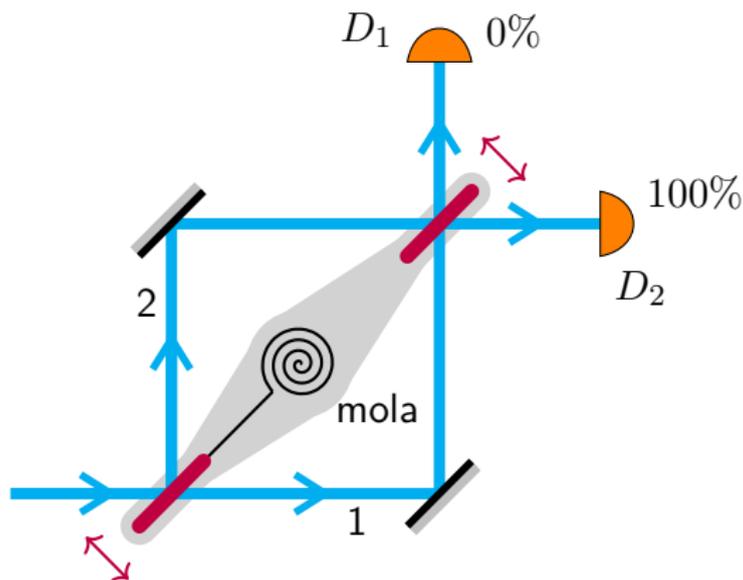
- ▶ Probabilidades:

$$P(D_1, Z) = P(D_1, V) = P(D_2, Z) = P(D_2, V) = 1/4 = 25\%$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(D_1) = P(D_1, Z) + P(D_1, V) = 50\% \\ P(D_2) = P(D_2, Z) + P(D_2, V) = 50\% \end{cases}$$

\Rightarrow o mesmo resultado do experimento!

Apagando a informação sobre o caminho



- ▶ mola não perturbada \leftrightarrow caminhos (1-1-1) e (1-2-1)
- ▶ mola vibrando \leftrightarrow caminhos (1-1-2) e (1-2-2)

Apagando a informação sobre o caminho

- ▶ Estado inicial: $|\psi_{inicial}\rangle = |1, Z\rangle$
- ▶ Primeiro semiespelho:

$$|1, Z\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2, V\rangle$$

Apagando a informação sobre o caminho

- Segundo semiespelho:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2, V\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1, Z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2, V\rangle \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1, Z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2, V\rangle \right)$$

- Estado final:

$$|\psi_{final}\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) |1, Z\rangle + \left(\frac{i}{2} + \frac{i}{2} \right) |2, V\rangle = i |2, V\rangle$$

↗
↘

interferência destrutiva
interferência construtiva

não há informação sobre o caminho \implies interferência reaparece!

Apagando a informação sobre o caminho

- ▶ Amplitudes de probabilidade:

$$\begin{cases} \langle 1Z | \psi_{final} \rangle = 0, & \langle 1V | \psi_{final} \rangle = 0 \\ \langle 2Z | \psi_{final} \rangle = 0, & \langle 2V | \psi_{final} \rangle = i \end{cases}$$

- ▶ Probabilidades:

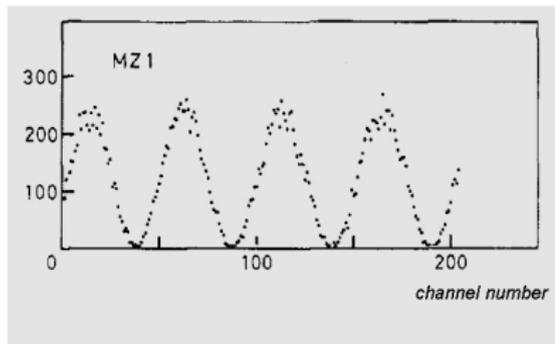
$$P(D_1, Z) = P(D_1, V) = P(D_2, Z) = 0, \quad P(D_2, V) = 100\%$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(D_1) = P(D_1, Z) + P(D_1, V) = 0\% \\ P(D_2) = P(D_2, Z) + P(D_2, V) = 100\% \end{cases}$$

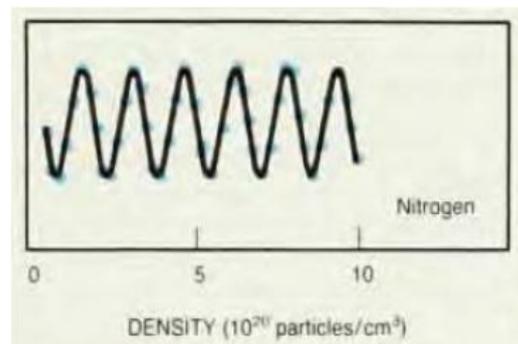
\Rightarrow o mesmo resultado do experimento!

Defasagem

As probabilidades $P(D_1)$ e $P(D_2)$ dependem de diferenças entre os dois caminhos no interferômetro.



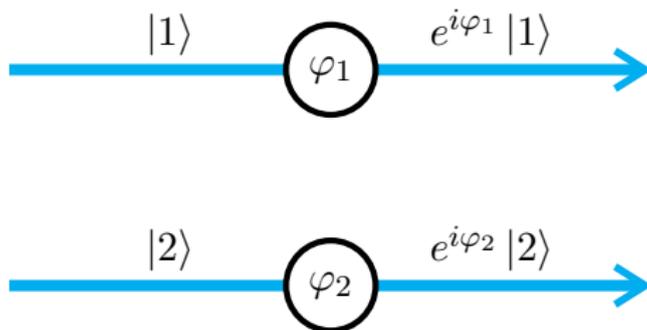
diferença de comprimentos



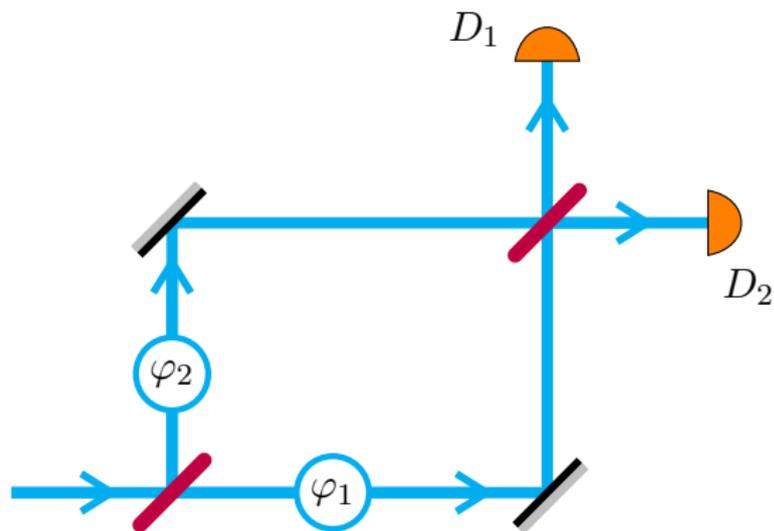
diferença de densidades

Defasagem

- Características do caminho percorrido \leftrightarrow fase φ



Defasagem



Defasagem

▶ Estado inicial: $|\psi_{inicial}\rangle = |1\rangle$

▶ Primeiro semiespelho:

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle$$

▶ Defasadores:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_1} |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} |2\rangle$$

Defasagem

- ▶ Segundo semiespelho:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_1}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_2}|2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_2} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \right)$$

- ▶ Estado final:

$$|\psi_{final}\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2} \right) |1\rangle + \frac{i}{2} \left(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \right) |2\rangle$$

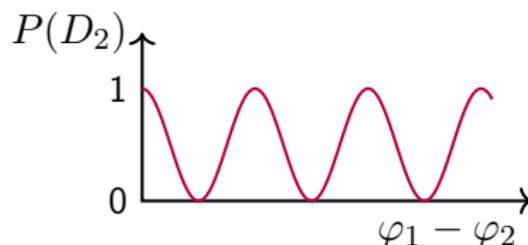
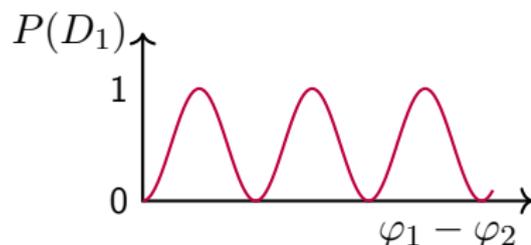
Defasagem

- ▶ Amplitudes de probabilidade:

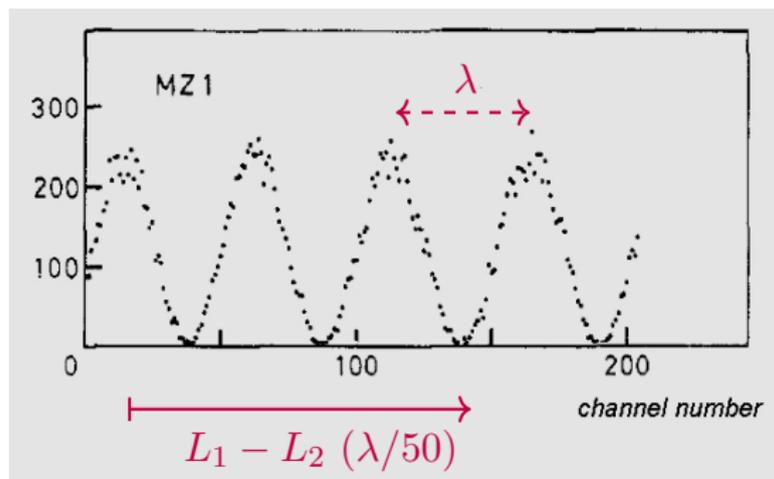
$$\begin{cases} \langle 1 | \psi_{final} \rangle = \frac{1}{2} (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) \\ \langle 2 | \psi_{final} \rangle = \frac{i}{2} (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}) \end{cases}$$

- ▶ Probabilidades:

$$\begin{cases} P(D_1) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ P(D_2) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{cases}$$



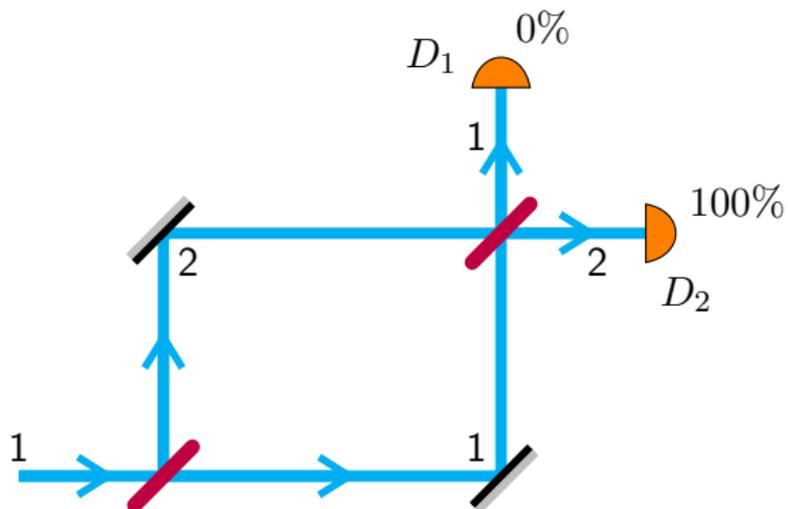
Defasagem \times distância



$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} L = kL \implies \varphi_1 - \varphi_2 = k(L_1 - L_2).$$

Caminhos indistinguíveis no interferômetro

Interferômetro de Mach-Zehnder



O que interfere no interferômetro?

$$|1\rangle \xrightarrow{1^\circ \text{ semiesp.}} t|1\rangle + r|2\rangle$$

$$\xrightarrow{2^\circ \text{ semiesp.}} t \times (t|1\rangle + r|2\rangle) + r \times (r|1\rangle + t|2\rangle)$$

$$= (tt + rr)|1\rangle + (tr + rt)|2\rangle$$

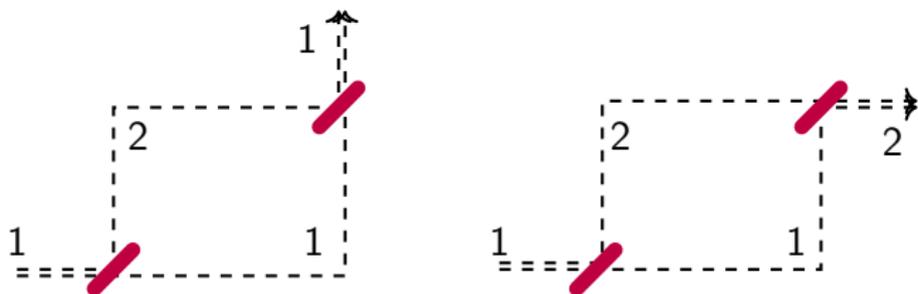
caminhos:

1-1-1

1-2-1

1-1-2

1-2-2



A amplitude de cada caminho

- Amplitude de probabilidade para cada caminho:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1(1 \rightarrow 1) = t \times t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (1-1-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 1) = r \times r = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (1-2-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1(1 \rightarrow 2) = t \times r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \end{array} \right. \quad (1-1-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 2) = r \times t = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \end{array} \right. \quad (1-2-2)$$

Soma sobre caminhos

- ▶ Amplitude “total” = soma das amplitudes de cada caminho:

$$\mathcal{A}(1 \rightarrow 1) = \mathcal{A}_1(1 \rightarrow 1) + \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathcal{A}(1 \rightarrow 2) = \mathcal{A}_1(1 \rightarrow 2) + \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 2) = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} = i$$

- ▶ Probabilidade:

$$P(D_1) = |\mathcal{A}(1 \rightarrow 1)|^2 = |\mathcal{A}_1(1 \rightarrow 1) + \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 1)|^2 = 0$$

$$P(D_2) = |\mathcal{A}(1 \rightarrow 2)|^2 = |\mathcal{A}_1(1 \rightarrow 2) + \mathcal{A}_2(1 \rightarrow 2)|^2 = 1$$

Interferência de amplitudes

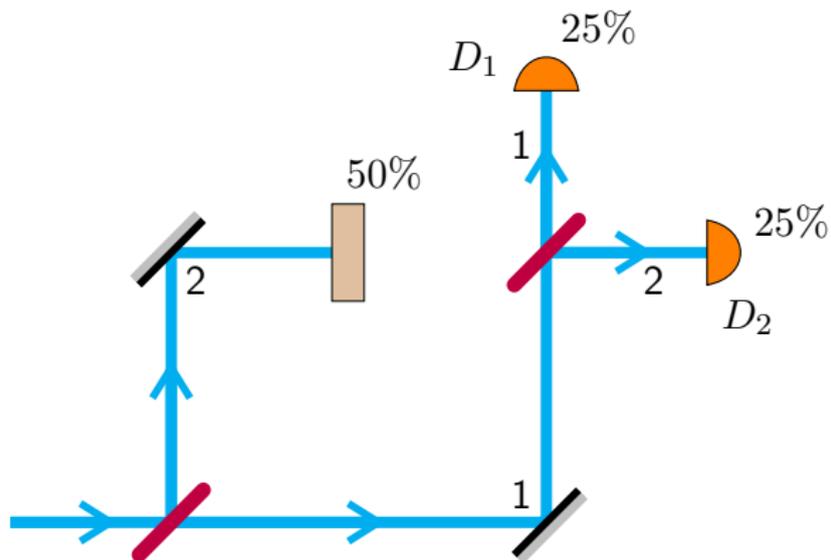
Se a e b são pontos de entrada e saída do interferômetro ($a, b = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 P(a \rightarrow b) &= |\mathcal{A}_1(a \rightarrow b) + \mathcal{A}_2(a \rightarrow b)|^2 \\
 &= |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 + \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^* \\
 &= P_1(a \rightarrow b) + P_2(a \rightarrow b) + 2 \Re(\mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2)
 \end{aligned}$$

↗
↑
↖

caminho (a-1-b)
caminho (a-2-b)
interferência

Caminho bloqueado



Por que não há interferência?

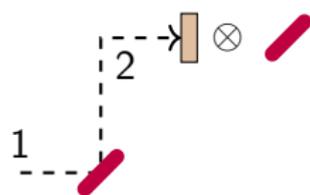
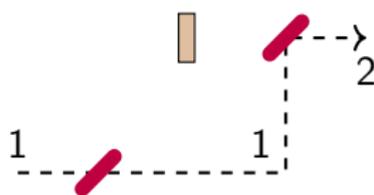
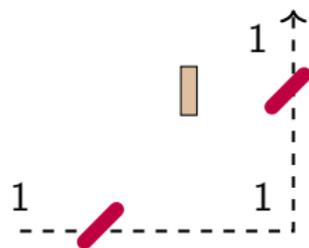
$$\begin{aligned}
 |1\rangle &\xrightarrow{1^\circ \text{ semiesp.}} t|1\rangle + r|2\rangle \xrightarrow{\text{bloqueio}} t|1\rangle + r|\otimes\rangle \\
 &\xrightarrow{2^\circ \text{ semiesp.}} t \times (t|1\rangle + r|2\rangle) + r|\otimes\rangle \\
 &= tt|1\rangle + tr|2\rangle + r|\otimes\rangle
 \end{aligned}$$

caminhos:

1-1-1

1-1-2

1-2- \otimes



Apenas um caminho

- ▶ Amplitude de probabilidade para cada caminho:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(1 \rightarrow 1) = t \times t = 1/2 & (1-1-1) \\ \mathcal{A}(1 \rightarrow 2) = t \times r = i/2 & (1-1-2) \\ \mathcal{A}(1 \rightarrow \otimes) = r = i/\sqrt{2} & (1-2-\otimes) \end{cases}$$

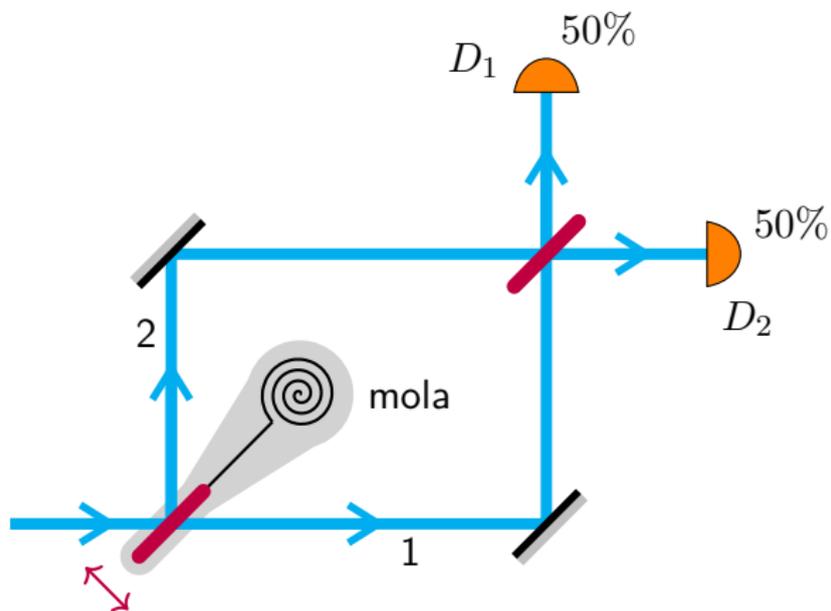
- ▶ Só há um caminho entre os pontos inicial e final
 - ⇒ não há diferentes amplitudes a serem somadas
 - ⇒ não há interferência!
- ▶ Probabilidades:

$$P(D_1) = |\mathcal{A}(1 \rightarrow 1)|^2 = 1/4$$

$$P(D_2) = |\mathcal{A}(1 \rightarrow 2)|^2 = 1/4$$

$$P(\otimes) = |\mathcal{A}(1 \rightarrow \otimes)|^2 = 1/2$$

Caminhos alternativos distinguíveis



Caminhos alternativos distinguíveis

$$|1Z\rangle \xrightarrow{\text{interf.}} tt|1Z\rangle + rr|1V\rangle + tr|2Z\rangle + rt|2V\rangle$$

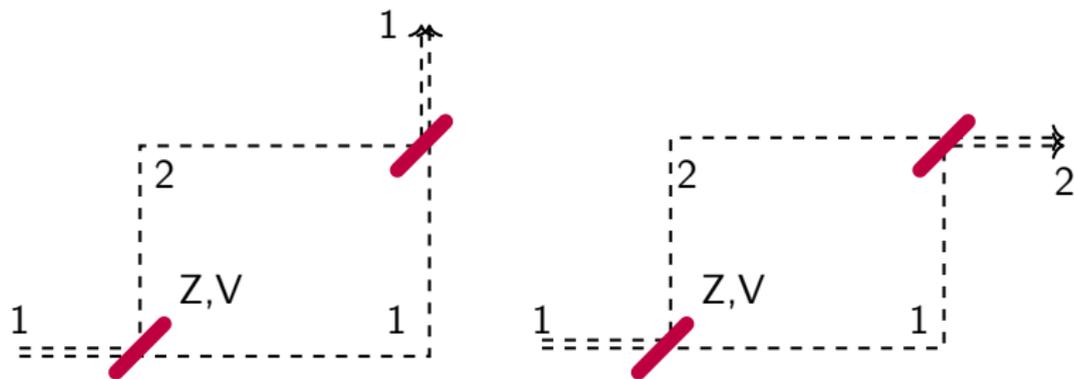
caminhos:

1Z-1Z-1Z

1Z-2V-1V

1Z-1Z-2Z

1Z-2V-2V



Caminhos alternativos distinguíveis

- ▶ Amplitudes de probabilidade:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}(1Z \rightarrow 1Z) = t \times t = 1/2 & (1Z-1Z-1Z) \\ \mathcal{A}(1Z \rightarrow 1V) = r \times r = -1/2 & (1Z-2V-1V) \\ \mathcal{A}(1Z \rightarrow 2Z) = t \times r = i/2 & (1Z-1Z-2Z) \\ \mathcal{A}(1Z \rightarrow 2V) = r \times t = i/2 & (1Z-2V-2V) \end{array} \right.$$

- ▶ Apenas um caminho entre os estados inicial e final.

Caminhos alternativos distinguíveis (cont.)

► Probabilidades:

$$\begin{cases} P(1Z \rightarrow 1Z) = |\mathcal{A}(1Z \rightarrow 1Z)|^2 = 1/4 \\ P(1Z \rightarrow 1V) = |\mathcal{A}(1Z \rightarrow 1V)|^2 = 1/4 \\ P(1Z \rightarrow 2Z) = |\mathcal{A}(1Z \rightarrow 2Z)|^2 = 1/4 \\ P(1Z \rightarrow 2V) = |\mathcal{A}(1Z \rightarrow 2V)|^2 = 1/4 \end{cases}$$

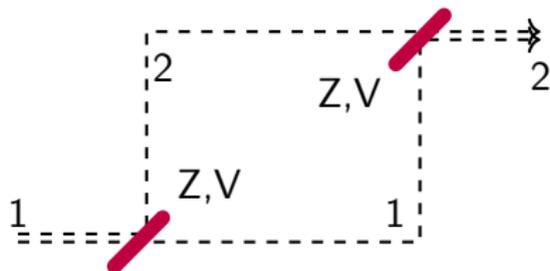
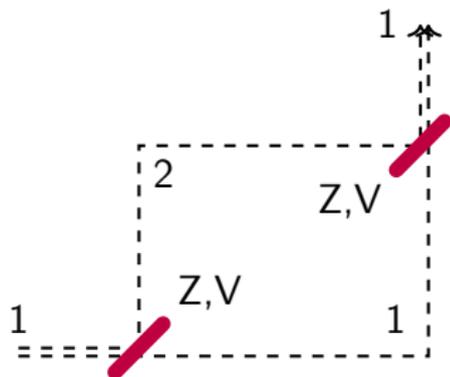
► Soma de probabilidades:

$$\begin{cases} P(D_1) = P(1Z \rightarrow 1Z) + P(1Z \rightarrow 1V) = 1/2 \\ P(D_2) = P(1Z \rightarrow 2Z) + P(1Z \rightarrow 2V) = 1/2 \end{cases}$$

Apagando a informação sobre o caminho

$$|1Z\rangle \xrightarrow{\text{interf.}} (tt + rr) |1Z\rangle + (tr + rt) |2V\rangle$$

caminhos: 1Z-1Z-1Z 1Z-2V-1Z 1Z-1Z-2V 1Z-2V-2V



Apagando a informação sobre o caminho

- ▶ Dois caminhos para um mesmo estado final.
- ▶ Amplitudes de probabilidade:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 1Z) = t \times t = 1/2 & (1Z-1Z-1Z) \\
 \mathcal{A}_2(1Z \rightarrow 1Z) = r \times r = -1/2 & (1Z-2V-1Z) \\
 \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 2V) = t \times r = i/2 & (1Z-1Z-2Z) \\
 \mathcal{A}_2(1Z \rightarrow 2V) = r \times t = i/2 & (1Z-2V-2V) \\
 \mathcal{A}_n(1Z \rightarrow 1V) = \mathcal{A}_n(1Z \rightarrow 2Z) = 0 & (\text{não há caminho})
 \end{array} \right.$$

Apagando a informação sobre o caminho

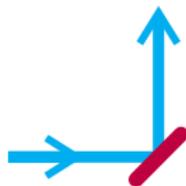
- ▶ Soma sobre caminhos:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(1Z \rightarrow 1Z) = \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 1Z) + \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 1Z) = 0 \\ \mathcal{A}(1Z \rightarrow 2V) = \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 2V) + \mathcal{A}_1(1Z \rightarrow 2V) = i \\ \mathcal{A}(1Z \rightarrow 1V) = \mathcal{A}(1Z \rightarrow 2Z) = 0 \quad (\text{zero caminhos}) \end{cases}$$

- ▶ Interferência retorna!

Regras de Feynman no interferômetro

- ▶ Reflexão por um semiespelho



$$\text{amplitude} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

- ▶ Transmissão por um semiespelho



$$\text{amplitude} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Regras de Feynman no interferômetro (cont.)

- ▶ Propagação (defasagem por deslocamento)



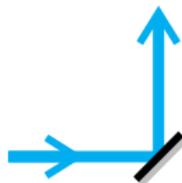
$$\text{amplitude} = e^{ikL}$$

- ▶ Defasagem (geral)



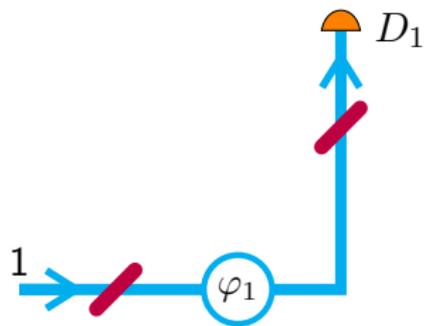
$$\text{amplitude} = e^{i\varphi}$$

- ▶ Reflexão por um espelho

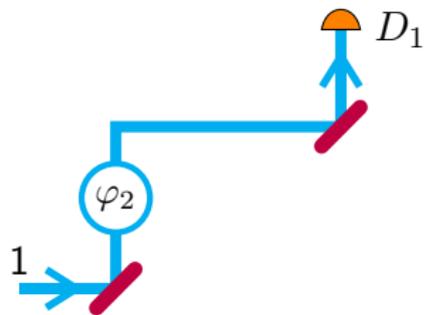


$$\text{amplitude} = i$$

Exemplo: interferômetro de Mach-Zehnder

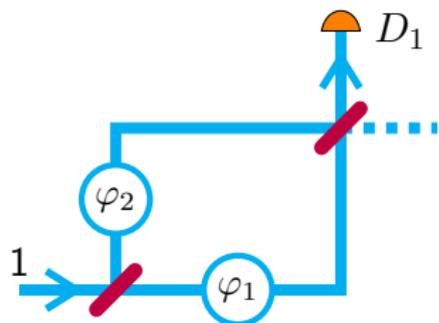


$$\mathcal{A}_1(1 \rightarrow D_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{i\varphi_1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\varphi_1}}{2}$$



$$\mathcal{A}_2(1 \rightarrow D_1) = \frac{i}{\sqrt{2}} \times e^{i\varphi_2} \times \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{e^{i\varphi_2}}{2}$$

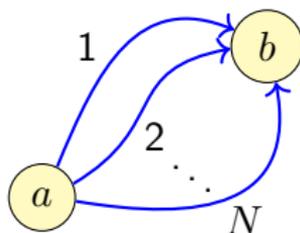
Exemplo: interferômetro de Mach-Zehnder



$$\mathcal{A}(1 \rightarrow D_1) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})$$

$$P(1 \rightarrow D_1) = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Soma sobre histórias



- ▶ Amplitude de uma história:

$\mathcal{A}_n(a \rightarrow b)$ = produto das amplitudes correspondentes a cada etapa da história n

- ▶ N histórias indistinguíveis: soma das amplitudes de cada história

$$\mathcal{A}(a \rightarrow b) = \mathcal{A}_1(a \rightarrow b) + \mathcal{A}_2(a \rightarrow b) + \cdots + \mathcal{A}_N(a \rightarrow b)$$

$$P(a \rightarrow b) = |\mathcal{A}_1(a \rightarrow b) + \mathcal{A}_2(a \rightarrow b) + \cdots + \mathcal{A}_N(a \rightarrow b)|^2$$

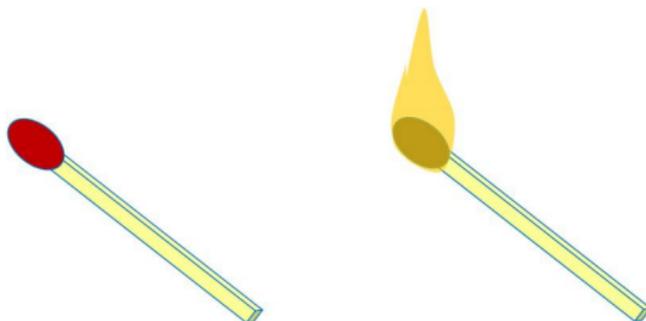
Soma sobre histórias

Há 31 anos Feynman falou-me a respeito da “soma sobre histórias”, sua versão da mecânica quântica. “O elétron faz o que desejar”, disse. “Ele vai em qualquer direção com qualquer velocidade,... do jeito que quiser, e então você soma as amplitudes e encontra a função de onda”. Eu disse, “Você está maluco”. Mas ele não estava.

– Freeman Dyson, 1980

Medida sem interação

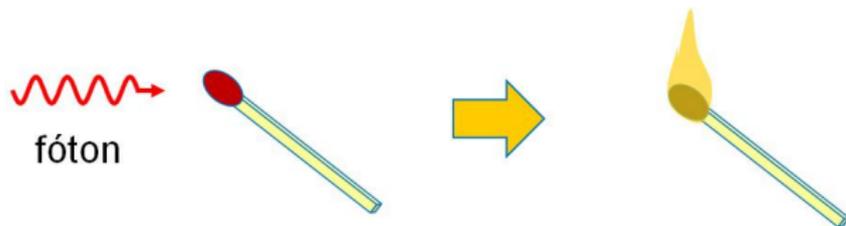
O palito de fósforo quântico



São acesos pela absorção de um único fóton!

O palito de fósforo quântico

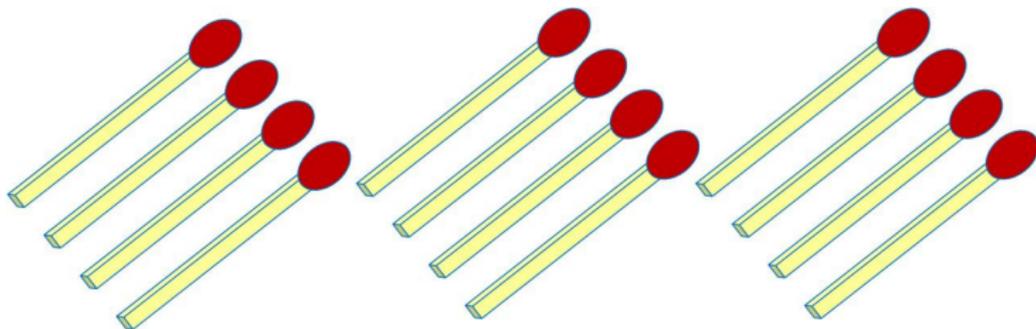
▶ Fósforo “bom”



▶ Fósforo “ruim”



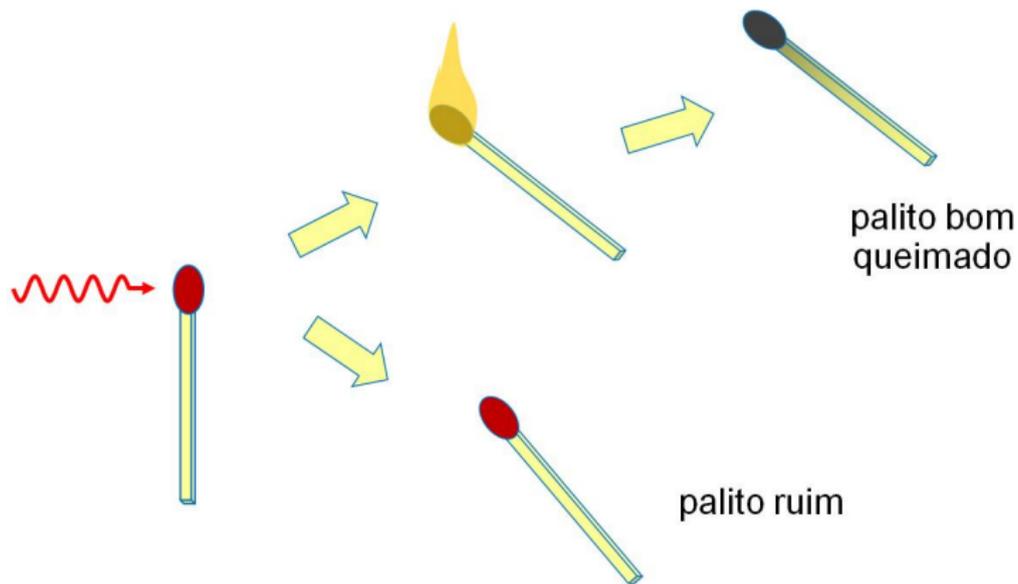
Um problema



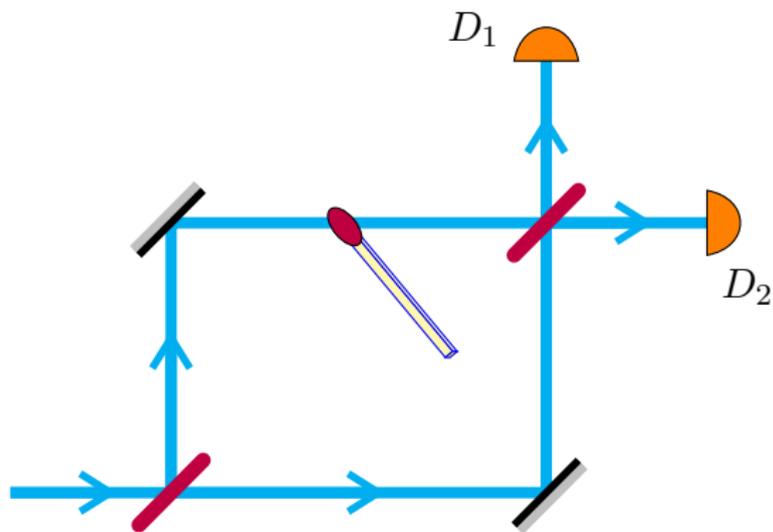
fósforos bons e ruins misturados

Problema: como encher uma caixa de
fósforos apenas com palitos bons?

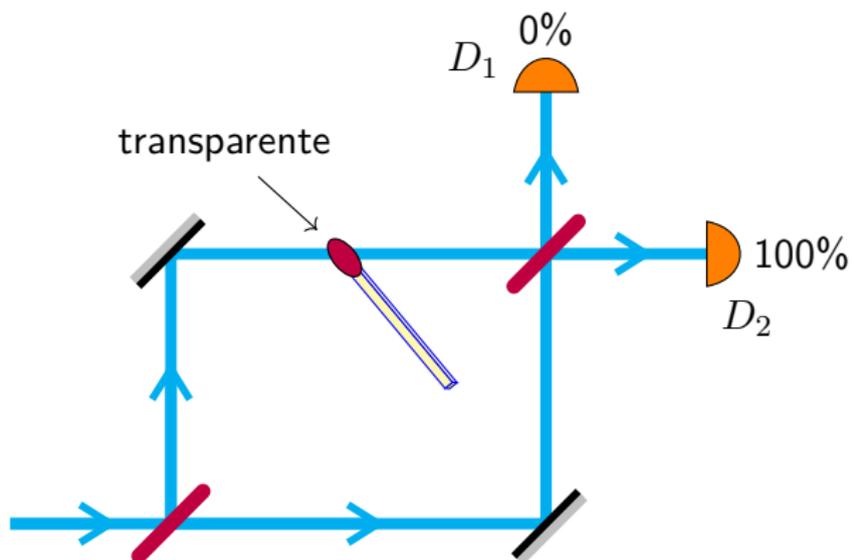
Solução “clássica”



Solução “quântica”

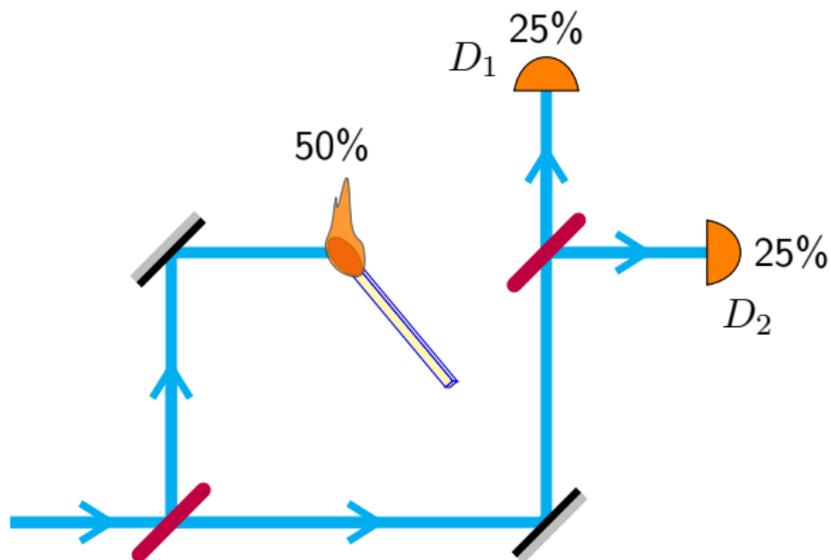


Palito ruim



palito ruim $\implies D_1$ nunca dispara

Palito bom



palito bom $\implies D_1$ dispara 25% das vezes
e o fósforo permanece intacto

Teste quântico

Resultados:

- ▶ fósforo acende \implies fósforo era bom mas agora está queimado
- ▶ D_1 dispara \implies fósforo bom intacto
- ▶ D_2 dispara \implies fósforo ruim ou fósforo bom intacto

Dos fósforos bons:

- ▶ 50% foram queimados
- ▶ 25% estão identificados como bons e permanecem intactos
- ▶ 25% em dúvida

Teste quântico

Conclusão:

É possível encher uma caixa de fósforos apenas com palitos bons!

O problema de Deutsch

O outro lado da moeda

Como saber se uma moeda é honesta ou viciada?

1º lado



2º lado



moeda honesta

1º lado



2º lado



moeda viciada

O outro lado da moeda

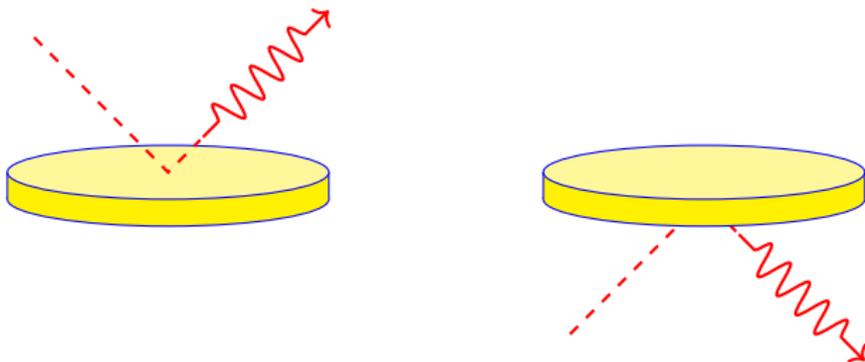
Resposta: olhando dos dois lados

	1º lado	2º lado		

			}	
				moeda honesta
4 possibilidades			}	
				moeda viciada

Os dois lados da moeda

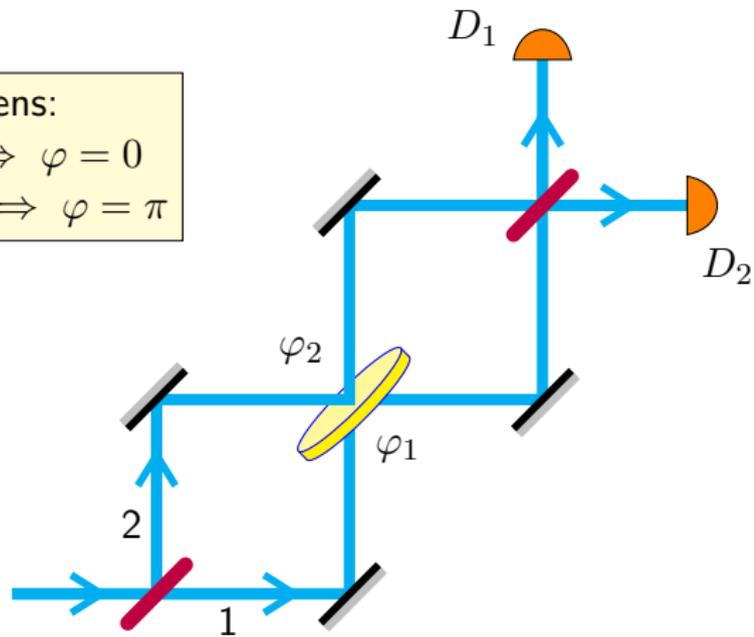
É possível espiar os dois lados da moeda com um único fóton?



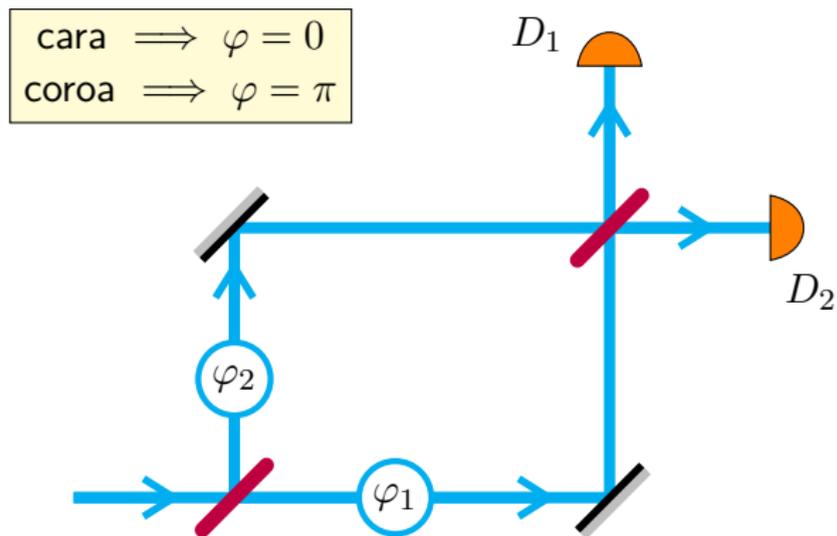
Aparentemente, seriam necessários no mínimo dois fótons.

Os dois lados da moeda

Defasagens:
 cara $\implies \varphi = 0$
 coroa $\implies \varphi = \pi$



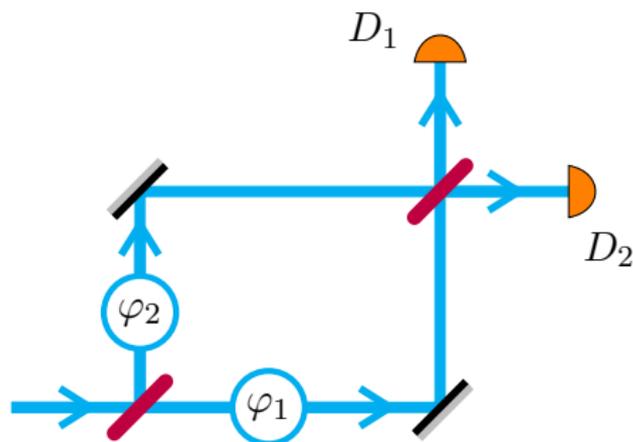
Montagem equivalente



Os dois lados da moeda

$$P(D_1) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$P(D_2) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$



moeda honesta:

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$$

fóton em D_1

moeda viciada:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

fóton em D_2

O problema de Deutsch

Seja uma função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$.

quatro possibilidades

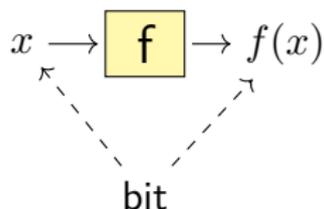
	$x = 0$	$x = 1$
f_1	0	0
f_2	1	1
f_3	0	1
f_4	1	0

f constante
 f "balanceada"

É possível descobrir se a função é constante com um único cálculo de f ?

O problema cuja solução (o algoritmo de Deutsch) foi um dos marcos iniciais da computação quântica.

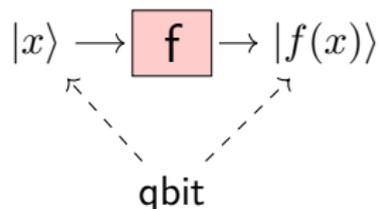
Calculadora clássica



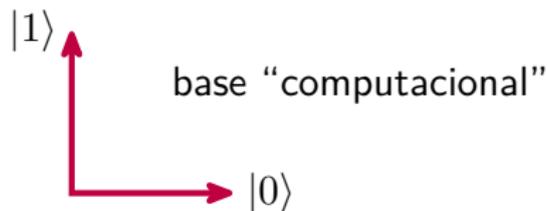
$bit \leftrightarrow$ variável que só pode assumir dois valores: 0 ou 1

Para determinar se f é constante ou balanceada, temos que usar a calculadora duas vezes: uma com $x = 0$ e outra com $x = 1$.

Calculadora quântica?



qbit \leftrightarrow sistema quântico cujo vetor de estado pode ser $|0\rangle$, $|1\rangle$ ou uma superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$



Calculadora quântica?

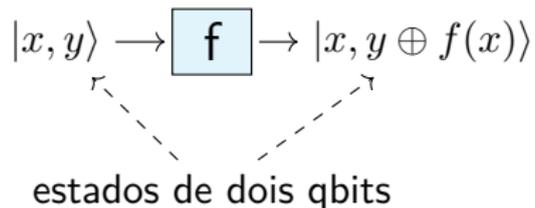
$$|x\rangle \rightarrow \boxed{f} \rightarrow |f(x)\rangle$$

- ▶ Processo quântico \implies a operação $|x\rangle \rightarrow |f(x)\rangle$ deve corresponder a uma evolução unitária.
- ▶ Se $f(x)$ é constante, o produto escalar não é conservado:

$$\langle 0|1\rangle = 0 \rightarrow \langle f(0)|f(1)\rangle = 1$$

\implies a operação não é unitária

A calculadora quântica



$$\oplus \leftrightarrow \text{adição módulo 2: } \begin{cases} 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 0 \end{cases}$$

A calculadora quântica

- ▶ A transformação $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$ conserva o produto escalar:

$$\begin{aligned}\langle x', y' | x, y \rangle &\rightarrow \langle x', y' \oplus f(x') | x, y \oplus f(x) \rangle \\ \delta_{x',x} \delta_{y',y} &\rightarrow \delta_{x',x} \langle x, y' \oplus f(x) | x, y \oplus f(x) \rangle = \delta_{x',x} \delta_{y',y}\end{aligned}$$

já que $y' \oplus f(x) = y \oplus f(x) \iff y' = y$.

- ▶ A função $f(x)$ pode ser calculada tomando $y = 0$:

$$|x, 0\rangle \rightarrow |x, f(x)\rangle$$

mas, aparentemente, ainda são necessários de dois cálculos para determinar se $f(x)$ é constante.

Superposições de estados de dois qbits

- Dois sistemas de dois estados:

$$|x, y\rangle$$

primeiro qbit ($x = 0, 1$)

segundo qbit ($y = 0, 1$)

- Base computacional: $|0, 0\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|0, 1\rangle$, $|1, 1\rangle$
- Superposição de estados do segundo qbit:

$$c_0 |x, 0\rangle + c_1 |x, 1\rangle = |x\rangle \otimes (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)$$

- Superposição de estados do primeiro qbit:

$$c_0 |0, y\rangle + c_1 |1, y\rangle = (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \otimes |y\rangle$$

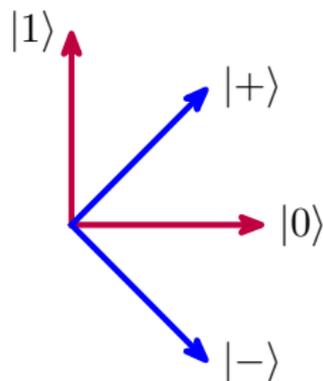
- Superposição de estados dos dois qbits:

$$c_{00} |0, 0\rangle + c_{10} |1, 0\rangle + c_{01} |0, 1\rangle + c_{11} |1, 1\rangle$$

Computação de superposições

- Outra base para os qbits:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$$



Computação de superposições

- ▶ Estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ no segundo qbit:

$$|x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x, 0\rangle \pm |x, 1\rangle)$$

- ▶ Processamento de $|x, +\rangle$:

$$|x, +\rangle \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{2}} (|x, 0 \oplus f(x)\rangle + |x, 1 \oplus f(x)\rangle) = |x, +\rangle$$

- ▶ Processamento de $|x, -\rangle$:

$$|x, -\rangle \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{2}} (|x, 0 \oplus f(x)\rangle - |x, 1 \oplus f(x)\rangle) = (-1)^{f(x)} |x, -\rangle$$

Computação de superposições

- ▶ Superposição também no primeiro qbit:

$$|\pm, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, +\rangle \pm |1, +\rangle)$$

$$|\pm, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, -\rangle \pm |1, -\rangle)$$

- ▶ Processamento de $|\pm, +\rangle$:

$$|\pm, +\rangle \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, +\rangle \pm |1, +\rangle) = |\pm, +\rangle$$

Computação de superposições

- ▶ Processamento de $|\pm, -\rangle$:

$$\begin{aligned} |\pm, -\rangle &\xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{f(0)} |0, -\rangle \pm (-1)^{f(1)} |1, -\rangle \right] \\ &= \frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}} \left[|0, -\rangle \pm (-1)^{f(1)-f(0)} |1, -\rangle \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ constante} & \Rightarrow |\pm, -\rangle \xrightarrow{f} (-1)^{f(0)} |\pm, -\rangle \\ f \text{ balanceada} & \Rightarrow |\pm, -\rangle \xrightarrow{f} (-1)^{f(0)} |\mp, -\rangle \end{cases}$$

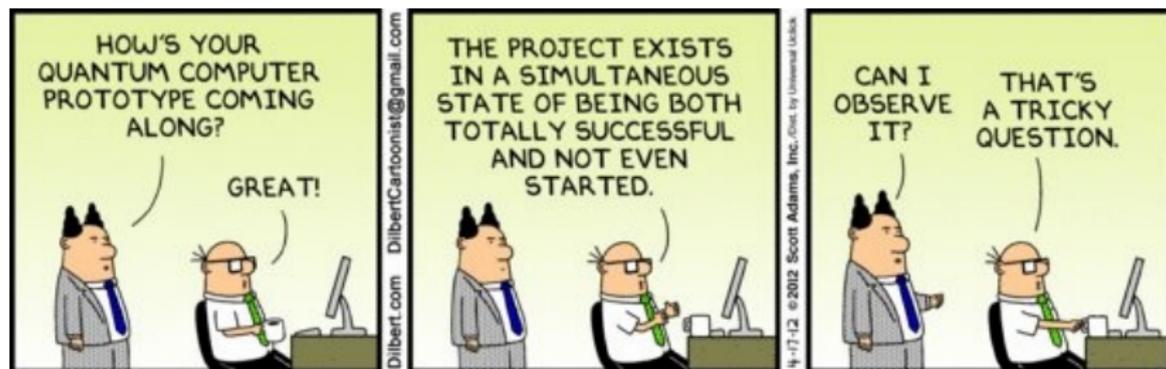
A solução do problema de Deutsch

$$|+, -\rangle \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \begin{cases} (-1)^{f(0)} |+, -\rangle & f \text{ constante} \\ (-1)^{f(0)} |-, -\rangle & f \text{ balanceada} \end{cases}$$

Um único cálculo de f :

$$\begin{cases} \text{primeiro qbit} = + & \implies f \text{ constante} \\ \text{primeiro qbit} = - & \implies f \text{ balanceada} \end{cases}$$

O computador quântico



Realismo, Contextualidade e Não-localidade



“Eu só gostaria de saber que diabos está acontecendo, é só! Eu gostaria de saber que diabos está acontecendo! Você sabe que diabos está acontecendo?”

Sumário

- Ensino e Aprendizagem de Mecânica Quântica
- Fenômenos Quânticos
- Princípios da Mecânica Quântica
- Sistemas Quânticos Simples
- Realismo, Contextualidade e Não-localidade
 - Realismo e variáveis ocultas
 - Contextualidade e não-localidade

Realismo e Variáveis Ocultas

Estados e grandezas físicas

Física clássica

- ▶ Estado do sistema: \vec{r} , \vec{p} (uma partícula)
- ▶ Grandeza física: $A(\vec{r}, \vec{p})$

Por exemplo:

- energia, $E(\vec{r}, \vec{p}) = p^2/(2m) + V(\vec{r})$
- momento angular, $\vec{L}(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}$
- ▶ A grandeza A tem sempre um valor bem definido, determinado pelo estado do sistema.
- ▶ Uma medida revela o valor de A , que existe independentemente da observação ser ou não realizada.

Estados e grandezas físicas

Mecânica quântica

- ▶ Estado do sistema: vetor $|\psi\rangle$ no espaço de estados
- ▶ Grandeza física: base $\{|a_n\rangle, n = 1, 2, \dots\}$ no espaço de estados
- ▶ O vetor de estado não determina o valor da grandeza física A ; em geral não faz sentido falar do valor de A no estado $|\psi\rangle$.
- ▶ O estado $|\psi\rangle$ determina apenas a probabilidade de uma medida de A resultar em $A = a_n$.
- ▶ A grandeza A não “tem” um valor antes da medida.

Realidade e observação

A ideia de um mundo real objetivo cujas menores partes existem objetivamente no mesmo sentido em que pedras e árvores existem, independentemente de nós as observarmos ou não [...] é impossível.

– *W. Heisenberg*

Observações não apenas perturbam o que está sendo medido, elas o produzem!

– *P. Jordan*

Realidade e observação

Quando perguntado sobre se o algoritmo da mecânica quântica espelharia um mundo quântico subjacente, Bohr respondia, 'Não há um mundo quântico. Há apenas uma descrição abstrata dada pela física quântica. É errado pensar que a tarefa da física seja descobrir como a natureza é. A física se ocupa do que podemos dizer sobre a natureza.'

– A. Petersen, *The Philosophy of Niels Bohr*

Uma (não)visão de (não)mundo, se algum dia houve alguma.

– N. D. Mermin

Realidade e observação

- ▶ Física clássica: a medida revela um valor preexistente.
- ▶ Mecânica quântica: a medida “cria” o resultado obtido.

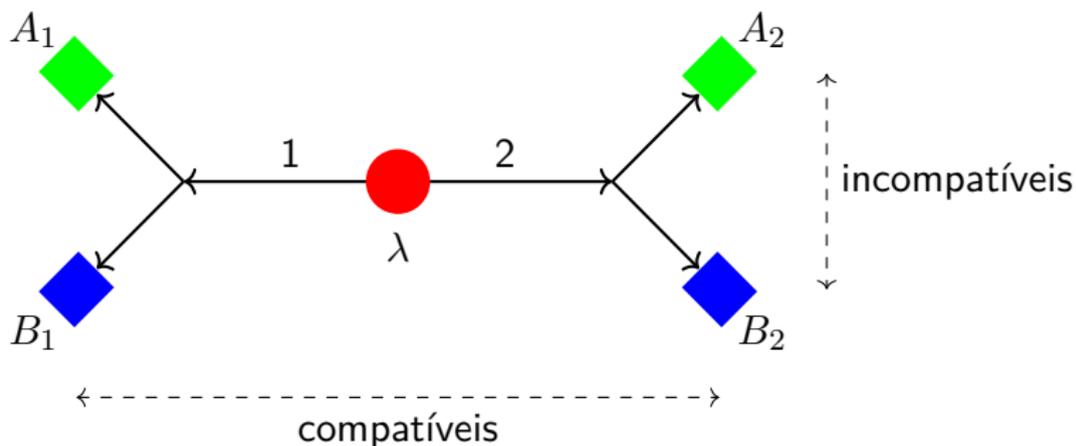
Variáveis ocultas

É possível atribuir valores a grandezas físicas independentemente da realização de medidas?

$$A(\psi, \lambda)$$

- ▶ $A \leftrightarrow$ valor da grandeza física
- ▶ $\psi \leftrightarrow$ estado quântico (“preparação” do sistema)
- ▶ $\lambda \leftrightarrow$ variável “oculta” que determina o valor de A

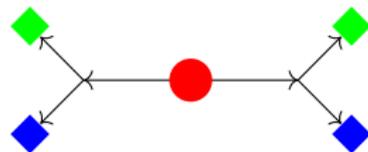
Teste experimental das teorias de variáveis ocultas



$$A_1(\lambda), B_1(\lambda), A_2(\lambda), B_2(\lambda) = \pm 1$$

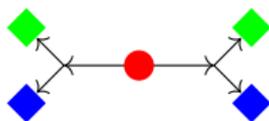
Teste experimental das teorias de variáveis ocultas

Quatro experimentos possíveis \Rightarrow

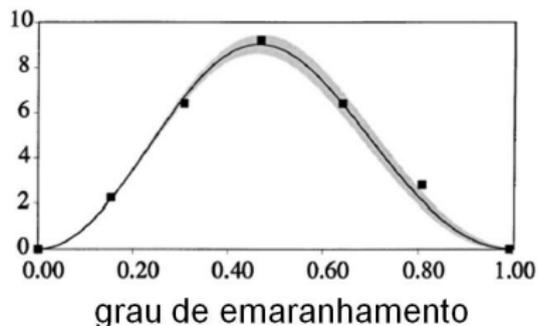


- i. Medida de A_1 e A_2 :
 $A_1 = +1$ e $A_2 = +1 \leftrightarrow$ encontrado algumas vezes
- ii. Medida de A_1 e B_2 :
 $A_1 = +1$ e $B_2 = +1 \leftrightarrow$ nunca encontrado
- iii. Medida de B_1 e A_2 :
 $B_1 = +1$ e $A_2 = +1 \leftrightarrow$ nunca encontrado
- iv. Medida de B_1 e B_2 :
 $B_1 = -1$ e $B_2 = -1 \leftrightarrow$ nunca encontrado

Teste experimental das teorias de variáveis ocultas



i. $P(A_1+, A_2+)$ (em %):



ii. $P(A_1+, B_2+) = 0$

iii. $P(B_1+, A_2+) = 0$

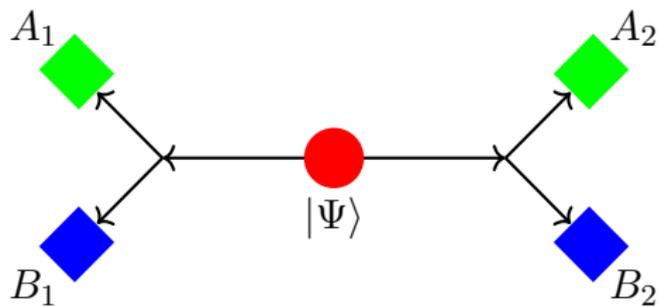
iv. $P(B_1-, B_2-) = 0$

A. G. White *et al.*, Phys. Rev. Lett. 83, 3013 (1999)

Teste experimental das teorias de variáveis ocultas

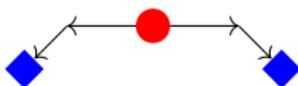
- ▶ Nenhuma teoria “simples” de variáveis ocultas é compatível com resultados experimentais bem estabelecidos.
- ▶ A mecânica quântica descreve esses resultados sem dificuldades, como veremos a seguir.

Estado de Hardy



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|B_{1+}, B_{2+}\rangle + |B_{1+}, B_{2-}\rangle + |B_{1-}, B_{2+}\rangle \right)$$

Estado de Hardy: experimento IV

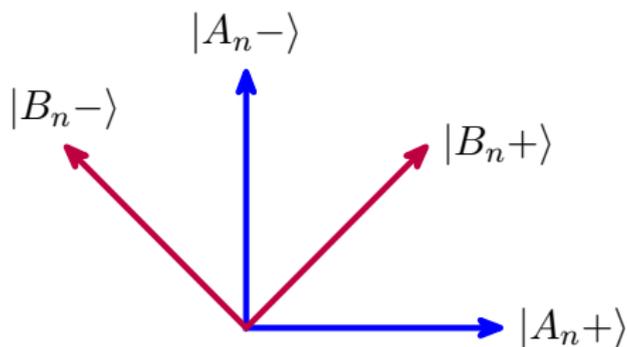


$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|B_{1+}, B_{2+}\rangle + |B_{1+}, B_{2-}\rangle + |B_{1-}, B_{2+}\rangle \right)$$

$$\langle B_{1-}, B_{2-} | \Psi \rangle = 0 \implies P(B_{1-}, B_{2-}) = 0$$

- experimento IV ✓

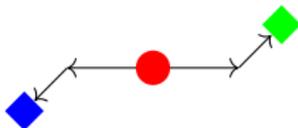
Estado de Hardy: autoestados de A_n



$$|B_n+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|A_n+\rangle + |A_n-\rangle)$$

$$|B_n-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|A_n+\rangle + |A_n-\rangle)$$

Estado de Hardy: experimento III



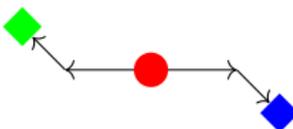
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|B_{1+}, B_{2+}\rangle + |B_{1+}, B_{2-}\rangle + |B_{1-}, B_{2+}\rangle \right)$$

$$\langle B_{1+}, A_2+ | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \right) = 0$$

$$\implies P(B_{1+}, A_2+) = 0$$

- experimento III ✓

Estado de Hardy: experimento II



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|B_{1+}, B_{2+}\rangle + |B_{1+}, B_{2-}\rangle + |B_{1-}, B_{2+}\rangle \right)$$

$$\langle A_{1+}, B_{2+} | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\implies P(A_{1+}, B_{2+}) = 0$$

- experimento II ✓

Estado de Hardy: experimento I



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|B_{1+}, B_{2+}\rangle + |B_{1+}, B_{2-}\rangle + |B_{1-}, B_{2+}\rangle \right)$$

$$\langle A_{1+}, A_{2+} | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\implies P(A_{1+}, A_{2+}) = \frac{1}{12}$$

- experimento I ✓

Realismo e mecânica quântica

- ▶ Nenhuma teoria “simples” de variáveis ocultas pode descrever a mesma física que um estado de Hardy, ou seja, todas são incompatíveis com a mecânica quântica.
- ▶ Há alguma forma mais elaborada das teorias de variáveis ocultas que seja compatível com a mecânica quântica?

Contextualidade e Não-localidade

Contextualidade

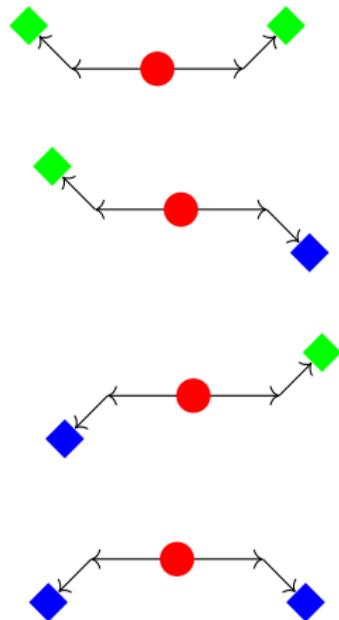
Teorias de variáveis ocultas contextuais:

$$A(\psi, \lambda, C)$$

- ▶ $A \leftrightarrow$ valor da grandeza física medida no experimento
- ▶ $\psi \leftrightarrow$ estado quântico (preparação do sistema)
- ▶ $\lambda \leftrightarrow$ variável oculta
- ▶ $C \leftrightarrow$ o “contexto”, as demais grandezas medidas no experimento

Contextualidade

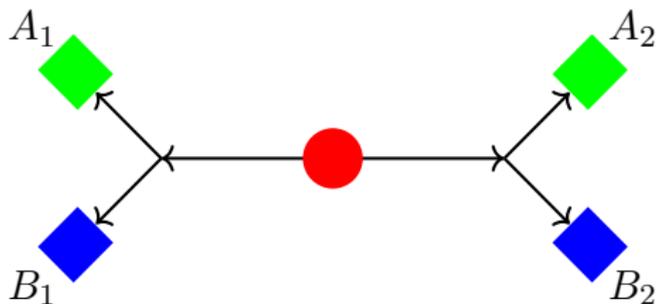
- ▶ Experimento I: $A_1(\lambda, I), A_2(\lambda, I)$
- ▶ Experimento II: $A_1(\lambda, II), B_2(\lambda, II)$
- ▶ Experimento III: $B_1(\lambda, III), A_2(\lambda, III)$
- ▶ Experimento IV: $B_1(\lambda, IV), B_2(\lambda, IV)$



Contextualidade

- ▶ O argumento usado para mostrar que qualquer teoria “simples” (não-contextual) de variáveis ocultas é incompatível com os estados de Hardy não é mais válido.
- ▶ Uma teoria contextual de variáveis ocultas pode fazer as mesmas previsões que a mecânica quântica.

Contextualidade e não-localidade



Não-localidade

Teorema de Bell

Qualquer teoria de variáveis ocultas compatível com a mecânica quântica é necessariamente não-local.